1. РЕАЛНИ БРОЈЕВИ

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

1.1. Приступ. Полазимо од тога да је читаоцу сасвим јасно, шта су то природни, цели и рационални бројеви. Ознаке које ћемо користити су следеће:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	скуп природних бројева
$\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$	скуп природних бројева са нулом
$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	скуп целих бројева
$\mathbf{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$	скуп рационалних бројева.

Иако сматрамо да су појмови броја јасни, ипак одговор на питање „Шта је то број три?“ нимало није лак. Ако напишемо број три овако: 3, подсетићемо се да то није број три већ ознака за број три. Ако узмемо три јабуке онда то опет није број три, већ три јабуке. Заиста, у природи, у стварном свету око нас не постоји само број три, већ само три нечега. Број три, као и сваки други постоји у нашим умовима, и апстрактан је по својој природи. Међутим, и поред тога што се не може опипати, нацртати или ма на који други начин матерјализовати, природан број је појам који је јасан сваком здравом (когнитивно здравом) детету при полазу у основну школу. Појам разломка, сматрају психолози једноставнији је од појма негативног броја - први од њих сместили су у пети разред, а други у шести разред основне школе.

И ту се, отприлике завршава математички садржај који је усвојив већини људи. Појам реалног броја далеко је сложенији, и ми који га схватамо и разумемо чинимо мањину. Прво нама познато откриће реалног броја начинио је Питагора, приметивши да број $\sqrt{2}$ није рационалан. Тај доказ исписан данашњим начином записивања изгледа овако:

Претпоставимо да $\sqrt{2}$ јесте разломак, на пример $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, при чему су m и n узајамно прости природни бројеви. Последњом претпоставком у ствари смо узели да су у том разломку извршена сва могућа скраћивања. Ситном рачуницом, онда закључујемо да је

$$m^2 = 2n^2,$$

односно да је број m^2 паран. Тада и m мора бити паран број, јер је квадрат непарног броја непаран, а парног паран. Нека је на пример $m = 2k$, но тада је $4k^2 = 2n^2$, односно

$$2k^2 = n^2.$$

Сада је n^2 паран број, па је и n паран. Тако су и m и n парни, што није могуће, јер смо претпоставили да су узајамно прости. Или друкчије: тада је могуће разломак скратити са 2, а рекли смо да су већ сва скраћивања извршена.

Али, откуда Питагори број $\sqrt{2}$? Једноставно, као дужина дијагонале квадрата странице 1. Међутим, можемо се запитати да ли број $\sqrt{2}$ постоји. За разлику од броја 3, за који засигурно можемо рећи да постоји три нечега у природи, слично се не може рећи за $\sqrt{2}$. Питагора је тај број видео као дужину дијагонале квадрата, али сви знамо да је цртеж идеализован, да свака линија коју цртамо има некакву дебљину, иако су је стари Грци сматрали „дужином без ширине“. Дакле, више или мање прецизно нацртану дијагоналу можемо срести, али не и тачно нацртану. Ван геометрије, потрага за кореном из два нечега може постати и смнешна. Замислите на пример, да уђете у продавницу и затражите $\sqrt{2}$ килограма брашна. То што сте тражили сигурно нећете добити, чак иако продавац има најбољу намеру - добићете приближну вредност ограничену могућностима ваге. Уколико наиђете на мање расположеног продавца, добићете мотку у главу...

У овој књизи, као и у већини савремених књига, структуру реалних бројева описаћемо аксиоматски, задајући систем аксиома, односно основних особина, које не доказујемо, већ сматрамо да се сви слажемо око њих. Као и у сваком другом аксиоматском систему, постављају се два питања: питање непротивррречности и питање одлучивости. Прво је питање, заправо бојазан, да се из датог списка аксиома могу редом извести тврђење A и његова негација $\neg A$. Друго је питање да ли се за ма које тврђење може на основу аксиома установити да ли је тачно или нетачно. Овим питањима се нећемо директно бавити. Посебна мањкавост аксиоматских система јесте недостатак конструкције. Ако скуп реалних бројева $\mathbf{R}$ опишемо као скуп који задовољава некакав списак аксиома, тиме још увек не одговарамо на питање шта је то реалан број. На крају ове главе, извешћемо и стандардну конструкцију скупа реалних бројева помоћу Дедекиндових пресека.

1.2. Уређена поља. Пре него што пређемо на саме реалне бројеве, упознаћемо једну нешто ширу класу математичких структура. То су уређена поља.

Уређено поље је скуп F, заједно са операцијама $+$, $\cdot$, константама (или истакнутим елементима) 0 и $1 \in F$, и релацијом $\leq$, тако да важе следеће аксиоме:

$(A0)$ $\quad 0 \neq 1;$
$(A1)$ $\quad \forall x, y, z \in F \ (x + y) + z = x + (y + z);$

$(A2)$ $\forall x \in F\ x + 0 = x;$
$(A3)$ $\forall x \in F\ \exists y \in F\ x + y = 0;$
$(A4)$ $\forall x, y \in F\ x + y = y + x$
$(A5)$ $\forall x, y, z \in F\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$
$(A6)$ $\forall x \in F\ x \cdot 1 = x;$
$(A7)$ $\forall x \neq 0 \in F\ \exists y \in F\ x \cdot y = 1;$
$(A8)$ $\forall x, y \in F\ x \cdot y = y \cdot x$
$(A9)$ $\forall x, y, z \in F\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;$
$(A10)$ $\forall x \in F\ x \leq x;$
$(A11)$ $\forall x, y \in F\ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y;$
$(A12)$ $\forall x, y, z \in F\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z;$
$(A13)$ $\forall x, y \in F\ x \leq y \vee y \leq x;$
$(A14)$ $\forall x, y, z \in F\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z;$
$(A15)$ $\forall x, y \in F\ 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y.$

Коментари у вези са овим аксиомама:

1° Неки не стављају аксиому $(A0)$. Она нема суштински значај, већ само искључује тривијалан пример уређеног поља, наиме једночлан скуп $F = \{0\}$, са правилима $0 + 0 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$, $0 \leq 0$.

2° Елемент y у $(A3)$ називамо *супротан елемент* елементу x и означавамо га са $-x$. Сличо, елемент y у $(A7)$ називамо *инверзни елемент* елементу x и означавамо га са x^{-1}. У овом тренутку дефиниција супротног (односно инверзног) елемента није коректна, јер аксиоме $(A3)$ и $(A7)$ тврде само да елементи са датим својством постоје, а не и да су јединствени, односно да не постоје два таква (или више њих), у ком случају би били у недоумици који од тих елмената означава $-x$, (односно x^{-1}). Међутим, убрзо ћемо доказати да су супротан и инверзни елемент јединствени.

2° Аксиоме $(A1) - (A4)$ баве се операцијом $+$, аксиоме $(A5) - (A8)$ операцијом $\cdot$; аксиома $(A9)$ повезује $+$ и $\cdot$. Аксиоме $(A10) - (A13)$ баве се релацијом $\leq$, аксиома $(A14)$ повезује $+$ и $\leq$, док аксиома $(A15)$ повезује $\cdot$ и $\leq$. Дакле, за сваки од симбола $+$, $\cdot$, $\leq$ имамо по четири аксиоме, и по једну која повезује два од њих.

3° Алгебарска структура са две операције $+$ и $\cdot$ која задовољава аксиоме $(A1) - (A9)$ назива се *поље*, ако су само $(A1) - (A7)$ и $(A9)$ онда је *тело*, ако су само $(A1) - (A5)$ и $(A9)$, онда је реч о *прстену.*

4° Када се задржимо само на операцији $+$, онда се структура у којој важе $(A1) - (A4)$ назива *комутативна група* (а неки кажу и *Абелова група*), ако важе само $(A1) - (A3)$, онда је *група*, ако важе само $(A1) - (A2)$ онда је то *полугрупа са јединицом*, а ако важи само $(A1)$, онда је реч о *полугрупи.* Неки уместо полугрупа кажу *семигрупа.*

5° Структура са једном релацијом $\leq$ и аксиомама $(A10) - (A12)$, назива се *уређен скуп*, а ако придодамо и аксиому $(A13)$, онда се назива *тотално (линеарно, потпуно) уређен скуп.*

6° У свакој аксиоматској теорији постоје различити системи аксиома који доводе до исте теорије, тада се аксиоме једног система могу доказати на основу аксиома другог система и обратно. За такве системе аксиома кажемо да су еквивалентни. Конкретно у теорији уређених поља, често се уместо аксиоме $(A15)$ наводи тврђење исказано у Ставу 1.5 ђ). Тада се тврдња овде наведена као аксиома доказује.

Дакле, уређено поље је поље и уређен скуп, једновремено, али тако да су операције $+$ и $\cdot$ сагласне са релацијом $\leq$, онако како је одређено аксиомама $(A14)$ и $(A15)$.

Први, и уједно најједноставнији, пример уређеног поља јесте скуп $\mathbf{Q}$ рационалних бројева, за који једноставно проверавамо да у њему важе све аксиоме. Скуп $\mathbf{Z}$ није уређено поље, јер у њему не важи, на пример, аксиома $(A7)$. Наиме, за број 2, не постоји други цео број y, такав да је $2 \cdot y = 1$. Скуп $\mathbf{N}$ није уређено поље, јер у њему такође не важи $(A7)$, али не важи ни $(A3)$...

У наредним Ставовима доказаћемо из аксиома најосновнија својства операција $+$ и $\cdot$ и релације $\leq$ у уређеним пољима. Реч је о уобичајеним правилима рачунања које смо сви до сада (мање или више) савладали током претходног школовања. Стога докази неће бити оптерећени додатним појашњавањима.

Све доказе правила рачунања које изводимо из аксиома читалац не треба преозбиљно да схвати. Они нису суштина анализе. Овде су наведени из два разлога, да би текст чинио заокружену целину, и да би се показало да заиста све може да се изведе из аксиома.

1.3. Став [особине сабирања]. У сваком уређеном пољу важи:
(а) $x + z = y + z \Rightarrow x = y$; (закон *скраћивања* или *канцелације*);
(б) $x + y = x \Rightarrow y = 0$; (јединственост неутралног елемента);
(в) $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$; (јединственост супротног елемента);
(г) $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

Доказ. а) $x = x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y$;

б) $x + y = x = x + 0$, па применимо а);

в) $x + y = 0 = x + (-x)$, па применимо а);

г) $(x+y)+((-x)+(-y)) = y+(x+(-x))+(-y) = y+0+(-y) = y+(-y) = 0$, па применимо в). □

1.4. Став [особине множења]. У сваком уређеном пољу важи:
(а) $x \cdot z = y \cdot z$ и $z \neq 0 \Rightarrow x = y$ (закон *скраћивања*);
(б) $x \cdot y = x$ и $x \neq 0 \Rightarrow y = 1$ (јединственост неутралног елемента);
(в) $x \cdot y = 1 \Rightarrow x \neq 0$ и $y = x^{-1}$ (јединственост инверзног елемента);
(г) $x \cdot 0 = 0$; Ако је $x \cdot y = 0$, онда је $x = 0$ или $y = 0$;
(д) $-(x \cdot (-y)) = x \cdot y$; $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$; $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$;
(ђ) $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

Доказ. а) $x = x \cdot 1 = x \cdot (z \cdot z^{-1}) = (x \cdot z) \cdot z^{-1} = (y \cdot z) \cdot z^{-1} = y \cdot (z \cdot z^{-1}) = y \cdot 1 = y$;

б) $x \cdot y = x = x \cdot 1$, па применимо а);

в) $x \cdot y = 1 = x \cdot x^{-1}$, па применимо а);

г) $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, па применимо закон скраћивања; Ако је, на пример, $x \neq 0$, онда постоји x^{-1}, па је $y = y \cdot 1 = y \cdot (x \cdot x^{-1}) = (y \cdot x) \cdot x^{-1} = 0 \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot 0 = 0$;

д) Имамо $x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0$, па применимо јединственост супротног елемента; слично $x \cdot y + (-x) \cdot y = y \cdot x + y \cdot (-x) = y \cdot (x + (-x)) = y \cdot 0 = 0$, па јединственост инверзног; најзад комбинацијом претходна два је $x \cdot y = -(x \cdot (-y)) = (-x) \cdot (-y)$;

ђ) $(xy)(x^{-1}y^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = x\cdot 1\cdot x^{-1} = xx^{-1} = 1$, па применимо в). $\square$

У претходном Ставу доказали смо не само особине множења, већ и особине које се односе и на сабирање и на множење. Пре него што наведемо особине релације $\leq$, уведимо и друге релације поретка:

$x \geq y$ ако и само ако је $y \leq x$;
$x < y$ ако и само ако је $x \leq y$ и $x \neq y$;
$x > y$ ако и само ако је $y \leq x$ и $x \neq y$.

1.5. Став [особине поређења]. (а) Из $x + z \leq y + z$ следи $x \leq z$; исто важи и за изведене релације $\geq, <, >$;

(б) $x \geq 0$ ако и само ако је $-x \leq 0$; $-(-x) = x$; $x \leq 0$ ако и само ако је $-x \geq 0$;

(в) $x \geq 0$ и $y \leq 0$ повлачи $x \cdot y \leq 0$;

(г) $x^2 = x \cdot x \geq 0$; $1 \geq 0$.

(д) $0 < x$ ако и само ако је $0 < x^{-1}$;

(ђ) Из $x \leq y$ и $0 \leq z$ следи $x \cdot z \leq y \cdot z$; Из $x \leq y$ и $z \leq 0$ следи $x \cdot z \geq y \cdot z$;

(е) Из $x \cdot z \leq y \cdot z$ и $z > 0$ следи $x \leq y$; из $x \cdot z \leq y \cdot z$ и $z < 0$ следи $x \geq y$.

Доказ. (а) Из $x+z \leq y+z$ и $(A14)$ следи $x = x+z+(-z) \leq y+z+(-z) = y$; исто важи и за изведене релације $\geq, <, >$;

б) $x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \Rightarrow$ (на основу $(A14)$) $-x \leq x + (-x) = 0$, и слично $-x \leq 0$ повлачи $(-x) + x \leq 0 + x$, то јест $0 \leq x$; другу једнакост добијамо када на $(-x) + x = 0 = (-x) + (-(-x))$ применимо закон скраћивања; трећа једнакост је комбинација прве две;

в) Из $y \leq 0$, на основу б) следи $-y \geq 0$, па је по аксиоми $(A15)$, $x \cdot (-y) \geq 0$, то јест, према Ставу 1.4 д), $-(x \cdot y) \geq 0$, одакле је $x \cdot y \leq 0$, према а);

г) Ако је $x \geq 0$, онда резултат следи непосредном применом аксиоме $(A15)$. Ако је $x \leq 0$, онда је, према а) $(-x) \geq 0$, па је (по $(A15)$) $(-x) \cdot (-x) \geq 0$, а према Ставу 1.4 д) је $(-x) \cdot (-x) = x \cdot x$; $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$;

д) Нека је $x > 0$, тада је $0 < 1 = x \cdot x^{-1}$, па због в), не може бити $x^{-1} < 0$; други смер следи из претходне тачке;

ђ) Најпре, из $x \leq y$ следи $0 \leq y + (-x)$, па како је $z \geq 0$, то на основу $(A15)$ имамо $0 \leq (y + (-x)) \cdot z = y \cdot z + (-x) \cdot z = y \cdot z + (-x \cdot z)$, па је $x \cdot z \leq y \cdot z$; За другу импликацију, искористимо да је $-z \geq 0$, на основу б), па је према претходном $x \cdot (-z) \leq y \cdot (-z)$, односно, $-x \cdot z \leq -y \cdot z$, према Ставу 1.4 д). Даље је $y \cdot z = y \cdot z + x \cdot z + (-x \cdot z) \leq y \cdot z + x \cdot z + (-y \cdot z) = x \cdot z$;

е) Претходну тачку ђ), применимо стављајући z^{-1} уместо z. $\square$

1.6. Ознаке. Нека скраћења у означавању смо заправо већ користили у претходним ставовима.

1° Због аксиома $(A1)$ и $(A5)$ непотребно је наводити заграде, па уместо $x + (y + z)$ или $(x + y) + z$ пишемо једноставно $x + y + z$;

2° Уобичајено је сматрати множење старијом операцијом од сабирања, па уместо $x + (y \cdot z)$ пишемо $x + y \cdot z$;

3° Ознаку за операцију множења често изостављамо, па пишемо xy уместо $x \cdot y$;

4° Уместо рогобатног $x + (-y)$ пишемо једноставније $x - y$ (операција одузимања);

5° Уместо xy^{-1} пишемо x/y или $\dfrac{x}{y}$ (операција дељења). У вези са овом операцијом, згодно је извести правило рачунања

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+mq}{qn},$$

које видимо јер је $\dfrac{p}{q}+\dfrac{m}{n}=pq^{-1}+mn^{-1}=pnn^{-1}q^{-1}+mqq^{-1}n^{-1}=(pn+mq)(nq)^{-1}=\dfrac{pn+mq}{nq}$;

6° Уместо $a_1+a_2+\cdots+a_n$ (збир n различитих сабирака) пишемо $\sum_{k=1}^{n} a_k$, и слично

$$\sum_{k=p}^{q} a_k \quad \text{је ознака за} \quad a_p+a_{p+1}+\cdots+a_q;$$

7° Сличну конвенцију уводимо и за производ, наиме

$$\prod_{k=p}^{q} a_k \quad \text{је ознака за} \quad a_p\cdot a_{p+1}\cdot\cdots\cdot a_q;$$

8° Уводимо *адитивни степен*

$$n\cdot x=\sum_{k=1}^{n} x=\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n \text{ пута}},$$

и *мултипликативни степен*

$$x^n=\prod_{k=1}^{n} x=\underbrace{x\cdot x\cdot\cdots\cdot x}_{n \text{ пута}};$$

Примедба: У дефиницији 8°, ознака n је ознака за природан број, а x је ознака за елементе уређеног поља F. Тако ознака $n\cdot x$ не означава производ два елемента поља F, већ „производ“ природног броја n и елемента $x\in F$. У наредном, видећемо да је и она прва интерпретација смислена.

1.7. Став. Важе правила:

а) $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k=\sum_{k=p+r}^{q+r} a_{k-r}$ и $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} a_k=\prod_{k=p+r}^{q+r} a_{k-r}$;

б) $a\cdot\sum_{k=p}^{q} b_k=\sum_{k=p}^{q} a\cdot b_k$;

в) $\left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right)^{-1}=\prod_{k=p}^{q} a_k^{-1}$.

Правила наведена под а) и б) називају се правила за *померање индекса сумације*, односно *множења.*

Доказ. а) се добија сменом $k+r=j$, а затим преозначавањем - уместо j поново напишемо k;

б) се добија узастопном применом аксиоме $(A9)$, а в) узастопном применом Става 1.4 (ђ). □

1.8. Став. а) Ако је за све $1 \le j \le n$, $a_j \le b_j$, онда је и $\sum_{j=1}^{n} a_j \le \sum_{j=1}^{n} b_j$. При томе знак једнакости важи ако и само ако је за све j, $a_j = b_j$.

б) Ако је за све $1 \le j \le k$, $0 \le a_j \le b_j$, онда је и $\prod_{j=1}^{n} a_j \le \prod_{j=1}^{n} b_j$. При томе знак једнакости важи ако и само ако је за све j, $a_j = b_j$ или ако је за неко j, $b_j = 0$.

Доказ. а) Узмимо за почетак да је $n = 2$. Тада примењујући аксиому (А14) двапут имамо

$$a_1 + a_2 \le a_1 + b_2 = b_2 + a_1 \le b_2 + a_2 = a_2 + b_2.$$

За веће n применимо више пута претходно расуђивање;

б) Исто као и претходно, само што уместо (А14) користимо Став 1.5 (ђ). $\square$

1.9. Дефиниција [изоморфизам уређених поља]. За два уређена поља $(F_1, +_1, \cdot_1, \le_1, 0_1, 1_1)$ и $(F_2, +_2, \cdot_2, \le_2, 0_2, 1_2)$ кажемо да су *изоморфна* ако постоји бијекција $\Phi : F_1 \to F_2$ таква да важи

$$\begin{aligned} &\Phi(x +_1 y) = \Phi(x) +_2 \Phi(y)\\ &\Phi(x \cdot_1 y) = \Phi(x) \cdot_2 \Phi(y)\\ &x \le_1 y \Rightarrow \Phi(x) \le_2 \Phi(y)\\ &\Phi(0_1) = 0_2\\ &\Phi(1_1) = 1_2 \end{aligned} \tag{1}$$

а пресликавање Φ називамо *изоморфизам*

У суштини, то значи да су поља F_1 и F_2 истоветна изузев што елементе, операције $+$ и $\cdot$, релацију $\le$ и константе 0 и 1 означавамо другачије. Збиља, уколико уместо поља $\mathbf{Q}$ посматрамо поље засађено поврћем чији су елементи „прва главица лука“, „друга главица лука“, ..., али и p/q-та главица лука итд, при чему се сабирање врши тако што је збир p/q-те и r/s-те главице лука, заправо $p/q + r/s$-та главица лука, а множење и поређење се дефинише у истом маниру, онда се новодобијено поље главица лука суштински ни у чему не разликује од поља рационалних бројева, осим у неважном детаљу што су елементи једног бројеви, а другог поврће.

Заиста, бијективност пресликавања Φ гарантује да се F_1 и F_2 могу поистоветити као скупови, а услов (1) да је пресликавање Φ *сагласно* са, редом, операцијом $+$, операцијом $\cdot$, релацијом $\le$ и константама 0 и 1 (а неки кажу и *чува* операцие).

Уколико важе само услови (1) онда за пресликавање Φ кажемо да је *хомоморфизам.*

Примедба: Појмови изоморфизам и хомоморфизам алгебарски су појмови и природно су везани за теорију алгебраских структура.

1.10. Став [уређено поље генерисано јединицом]. Нека је F уређено поље. Постоји подскуп скупа F_0 скупа F који је *изоморфан* (односно *истоветан*) са пољем $\mathbf{Q}$ рационалних бројева. Штавише, F_0 је минимално потпоље поља F.

Доказ. Нека је n природан број. Посматрајмо адитивне степене броја 1,

$$n \cdot 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ пута}} \in F.$$

Сви су они међусобно различити, јер је

$$(n+1)\cdot 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1 \text{ пута}} = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ пута}} + 1 = n\cdot 1 + 1 > n \cdot 1 + 0.$$

Фромално говорећи $\{n \cdot 1 \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ нису природни бројеви, већ елементи поља F, али их можемо поистоветити, јер наиме пресликавање $\Phi : \mathbf{N} \to F$, дато са $\Phi(n) = n \cdot 1$ не само да је бијекција (узајамно једнозначно), већ је сагласно и са операцијама $+$ и $\cdot$. То следи из закона асоцијативности, комутативности и дистрибутивности на следећи начин:

$$\begin{aligned}\Phi(m+n) = (m+n)\cdot 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{m+n \text{ пута}} = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{m \text{ пута}} + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ пута}} =\\ = m\cdot 1 + n \cdot 1 = \Phi(m)+\Phi(n)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\Phi(mn) &= (mn)\cdot 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{mn \text{ пута}} =\\ &= \underbrace{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ пута}} + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ пута}} + \cdots + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ пута}}}_{m \text{ пута}} =\\ &= (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m \text{ пута}}) \cdot (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ пута}}) =\\ &= (m\cdot 1)(n \cdot 1) = \Phi(m)\Phi(n).\end{aligned}$$

Покушаћемо да пресликавање Φ на природан начин проширимо прво до скупа целих, а затим и до скупа рационалних бројева. Нека је $m \in \mathbf{Z}$ и $m < 0$. Ставимо $\Phi(m) = m \cdot 1 = -(-m)\cdot 1$. И ставимо $\Phi(0) = 0 \cdot 1 = 0$.

Најзад, ако је $p/q \in \mathbf{Q}$, ставимо $\Phi(p/q) = (p/q)\cdot 1 = \Phi(p)\Phi(q)^{-1}$. Као и малопре, једноставно се дају проверити особине

$$\Phi(x+y) = \Phi(x)+\Phi(y); \quad \Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y); \quad x \le y \Rightarrow \Phi(x) \le \Phi(y),$$

што препуштамо читаоцу. $\square$

Примедба: Уобичајену уџбеничку фразу „препуштамо читаоцу да докаже“ треба разумети као „аутора мрзи да доказује“, што је примењиво и у овом случају.

1.11. Факторијел и биномни коефицијент. На основу претходног става, свако уређено поље садржи верну копију F_0 скупа рационалних бројева $\mathbf{Q}$. То говори да је $\mathbf{Q}$ минимално, најмање могуће уређено поље. Убудуће нећемо правити разлику између рационалних бројева и њима одговарајућих елемената потпоља F_0. Другим речима, за $q \in \mathbf{Q}$, уместо $\Phi(q)$ писаћемо просто q, а за $n \in \mathbf{N}$ уместо $\Phi(n)$ или $n \cdot 1$ писаћемо просто n. Тако се адитивни степен nx због

$$nx = x + x + \cdots + x = (1+1+\cdots+1)x = (n\cdot 1)\cdot x = n \cdot x$$

може схватити и као производ природног броја n (прецизније његове слике $\Phi(n) \in F_0$) и елемента $x \in F$. На тај начин имају смисла наредне дефиниције:

1° *Факторијел* природног броја n је

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n;$$

2° *Биномни коефицијент* је

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots (\alpha - n + 1)}{n!}.$$

1.12. Став. а) Ако је $\alpha \in \mathbf{N}$, тада је

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha - n)!};$$

б) Увек је

$$\binom{\alpha}{n-1} + \binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha + 1}{n};$$

в) Важи

$$(x + y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Ово је позната *биномна формула*;

г) Важи $\sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \begin{cases} \dfrac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}, & \lambda \neq 1 \\ n + 1, & \lambda = 1 \end{cases}$. Ово је формула за *суму геометријског низа.*

Доказ. а) Ако је $\alpha \in \mathbf{N}$, тада

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1) =$$

$$= \frac{1}{n!} \prod_{j=\alpha}^{\alpha - n + 1} j = \frac{1}{n!} \prod_{j=\alpha - n + 1}^{\alpha} j =$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha} j}{\prod_{j=1}^{\alpha - n} j} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha - n)!};$$

б) Имамо

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{n-1}+\binom{\alpha}{n} &= \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha-k+1}{k}+\prod_{k=1}^{n}\alpha-k+1k=\\ &=\left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha-k+1}{k}\right)\cdot\left(1+\frac{\alpha-n+1}{n}\right)=\\ &=\left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha-k+1}{k}\right)\cdot\frac{\alpha+1}{n}=\\ &=\frac{\prod\limits_{k=2}^{n}(\alpha+1-k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}k}\cdot(\alpha+1)=\\ &=\prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha+1-k+1}{k}=\binom{\alpha+1}{n};\end{aligned}$$

в) Ово доказујемо индукцијом. За $n = 1$ једнакост постаје $(x+y)^1 = x+y$, што је несумњиво тачно. Претпоставимо да је једнакост тачна за неко $n \in \mathbf{N}$. Тада је

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}(x+y)=\\ &=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k+1}= \quad \left(\begin{array}{c}\text{померамо индекс}\\ \text{сумације у првој}\end{array}\right)\\ &=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^ky^{n-k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k+1}=\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)x^ky^{n-k+1}+x^{n+1}+y^{n+1}=\\ &=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^ky^{n+1-k}.\end{aligned}$$

г) Ако је $\lambda = 1$ онда је ствар тривијална, јер видимо одмах адитивни степен. Нека је $\lambda \neq 1$. Означимо $S = \sum\limits_{k=0}^{n}\lambda^k$. Тада је

$$\lambda S = \lambda\sum_{k=0}^{n}\lambda^k=\sum_{k=0}^{n}\lambda^{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda^k=S+\lambda^{n+1}-1,$$

одакле једноставно следи резултат. □

РЕАЛНИ БРОЈЕВИ

1.13. Супремум, инфимум. Нека је F уређен скуп, односно скуп са релацијом $\leq$ које задовољава аксиоме $(A10)-(A12)$, и нека је $S \subseteq F$.

Кажемо да је елемент $M \in F$ *горње ограничење* (а неки кажу и *мајоранта*) скупа S, ако за све $x \in S$ важи $x \leq M$. Слично, елемент $m \in F$ је *доње ограничење* (*миноранта*) ако за све $x \in F$, важи $m \leq x$.

Кажемо да је елемент $\sigma \in F$ *супремум* (а неки кажу и *горња међа* или *тачна горња граница* скупа S, и пишемо $\sigma = \sup S$, ако:

(1) σ је горње ограничење скупа S;

(2) σ је најмање могуће горње ограничење. Другим речима, ако је и y горње ограничење скупа S, онда је $\sigma \leq y$.

Аналогно се дефинише и инфимум.

Кажемо да је елемент $\sigma \in F$ *инфимум* (а неки кажу и *доња међа* или *тачна доња граница* скупа S, и пишемо $\sigma = \inf S$, ако:

(1) σ је доње ограничење скупа S;

(2) σ је највеће могуће доње ограничење. Другим речима, ако је y доње ограничење скупа S, онда је $\sigma \geq y$.

1.14. Дефиниција [скуп R]. Реални бројеви су уређено поље $\mathbf{R}$ у коме поред аксиома уређеног поља, важи и:

$(A16)$ Ако је $S \subseteq \mathbf{R}$ непразан и одозго ограничен скуп, онда постоји $\sigma = \sup S$.

1.15. Став [о инфимуму]. Нека је $S \subseteq \mathbf{R}$ непразан и одоздо ограничен скуп. Тада постоји $\sigma = \inf S$.

Доказ. Нека је $T = -S = \{-x \mid x \in S\}$. Свакако је T непразан скуп. Докажимо и да је ограничен одозго. Заиста, нека је m доње ограничење скупа S, тада је за све $x \in S$, $m \leq x$, односно $-m \geq -x$. Тако је $-m$ горње ограничење скупа T.

Према аксиоми $(A16)$, постоји $\tau = \sup T$. Показаћемо да је $-\tau = \inf S$. У ту сврху треба проверити две ствари. Прво да је доње ограничење. Заиста, τ је горње ограничење скупа T, па за све $y \in T$, важи $y \leq \tau$. Међутим елементи скупа T су облика $y = -x$, за $x \in S$, па за све $x \in S$ вреди $-x \leq \tau$, односно $-\tau \leq x$. Друго треба доказати да је то највеће доње ограничење. Заиста, ако је $z > -\tau$, тада је $-z < \tau$, па $-z$ не може бити горње ограничење скупа T (иначе τ не би било најмање горње ограничење). Тако постоји $y \in T$ такво да је $-z < y = -x$, за неко $x \in S$, односно $z > x$ за неко $x \in S$, па z није доње ограничење скупа S. $\square$

1.16. Лема [о карактеризацији супремума]. Нека је $S \subseteq \mathbf{R}$ непразан и одозго ограничен скуп. Број σ је супремум скупа S ако и само ако је: (1) горње ограничење скупа S; (2) за све $\varepsilon > 0$, постоји $x \in S$ такво да је $\sigma - \varepsilon < x$.

Доказ. $\Rightarrow$) Ако σ јесте супремум скупа S, и ако је $\varepsilon > 0$, онда је $\sigma - \varepsilon < \sigma$, па по дефиницији супремума, $\sigma - \varepsilon$ не може бити горње ограничење, а то значи да није за све $x \in S$, $x \leq \sigma - \varepsilon$, односно да постоји $x \in S$ такво да је $\sigma - \varepsilon < x$.

$\Leftarrow$) Нека је σ горње ограничење и нека важи услов (2). Докажимо да је σ најмање горње ограничење. Нека је $y < \sigma$. Тада је $y = \sigma - \varepsilon$, где је $\varepsilon = \sigma - y > 0$, па по услову (2) постоји $x \in S$, такво да је $y = \sigma - \varepsilon < x$, па y не може бити горње ограничење. □

1.17. Став [Архимедово својство]. Нека су $a, b \in \mathbf{R}$ строго позитивни бројеви. Тада постоји $n \in \mathbf{N}$, такво да је $n \cdot a > b$.

Примедба1: Иако носи Архимедово име, својство потиче од Еудокса Книђанина.

Примедба2: Својство је наведено у Еуклидовим елементима, као једно од геометријских аксиома. Наиме, геометријска формулација ове тврдње је да за сваке две дужи постоји природан број n, тако да ако мању дуж надовежемо n пута саму на себе, она ће престићи дужу. Зато је ова тврдња позната и као *Архимедова аксиома о престиживости.* Ми је овде не називамо тако, јер је доказујемо.

Доказ. Претпоставимо супротно, да постоје позитивни $a, b \in \mathbf{R}$ такви да је за све $n \in \mathbf{N}$,

$$n \cdot a < b, \tag{2}$$

и уочимо скуп $S = \{n \cdot a \,|\, n \in \mathbf{N}\}$. Он је очигледно непразан, али је због (2) и ограничен одозго, па према ($A16$) постоји $\sigma = \sup S$. Како је $a > 0$ то је $\sigma - a < \sigma$, па према Леми о карактеризацији супремума, постоји елемент скупа S који је већи од $\sigma - a$, односно постоји $n \in \mathbf{N}$ такав да је $\sigma - a < n \cdot a$. Но тада је и $\sigma < (n+1) \cdot a \in S$, па σ није горње ограничење скупа S. Контрадикција. □

Примедба: Архимедово својство поседују и рационални бројеви, то једноставно видимо. Међутим доказ се ослања на аксиому супремума, што сугерише да се Архимедово својство не може доказати само из првих петнаест аксиома. Заиста, постоје уређена поља која немају Архимедово својство, такозвана *неархимедова поља.* О томе видети вежбања 3, 4.

1.18. Дефиниција [Интервали]. Нека је F уређен скуп, и нека су $a, b \in \mathbf{R}$. Интервали су следећи скупови:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in F \,|\, a < x < b\};\\
[a,b] &= \{x \in F \,|\, a \le x \le b\};\\
[a,b) &= \{x \in F \,|\, a \le x < b\};\\
(a,b] &= \{x \in F \,|\, a < x \le b\};\\
(a,+\infty) &= \{x \in F \,|\, a < x\};\\
[a,+\infty) &= \{x \in F \,|\, a \le x\};\\
(-\infty,b] &= \{x \in F \,|\, x \le b\};\\
(-\infty,b) &= \{x \in F \,|\, x < b\};\\
(-\infty,+\infty) &= F.
\end{aligned}$$

Инклузија $[a,b] \subseteq [c,d]$ еквивалентна је неједнакостима $a \le c$ и $b \ge d$, и слично за остале.

Затворене коначне интервале често зовемо *сегменти.*

1.19. Став [карактеризација интервала]. Непразан скуп $A \subseteq \mathbf{R}$ је интервал ако и само ако задовољава особину:

$$\forall x, y, z \quad x \leq y \leq z \ \wedge \ x, z \in A \quad \Rightarrow \quad y \in A. \tag{3}$$

Доказ. $\Rightarrow$) непосредна провера;

$\Leftarrow$) Означимо $\alpha = \inf A$, $\beta = \sup A$. Истина, бројеви $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ постоје искључиво ако је скуп A ограничен одоздо, односно одозго, али ако није договоримо се да тада ставимо $\alpha = -\infty$, односно $\beta = +\infty$. Доказујемо следеће тврдње:

1° Ако је $\alpha < x < \beta$ тада $x \in A$. Заиста, тада x није ни горње ни доње ограничење скупа A, јер у првом случају α не би био инфимум, а у другом β не би био супремум, па тада постоје $\underline{x}, \overline{x} \in A$, такви да је $\alpha < \underline{x} < x$, $x < \overline{x} < \beta$. (У случају да су α, β бесконачности, образложење зашто постоје $\underline{x}, \overline{x}$ је још једноставније.) Према особини (3), тада $x \in A$.

2° Ако $x \notin [\alpha, \beta]$ тада $x \notin A$. Ако је на пример $x < \alpha$, тада $x \notin A$, јер у супротном α не би био доње ограничење. Слично, ако $x > \beta$, онда $x \notin A$, јер у супротном β не би био горње ограничење. (Ако су α, β бесконачности, онда овде можда и нема шта да се доказује.)

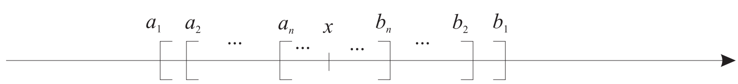
Дакле, $(\alpha, \beta) \subseteq A \subseteq [\alpha, \beta]$. $\square$

1.20. Став [Кантор]. а) Дат је низ интервала $[a_n, b_n] \subseteq \mathbf{R}$, таквих да за све n важи

$$[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]. \tag{4}$$

Тада постоји $x \in \mathbf{R}$ такво да је $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$, односно $x \in [a_n, b_n]$, за све n;

б) Ако, при томе, за свако $\varepsilon > 0$, постоји $n \in \mathbf{N}$ са особином $b_n - a_n < \varepsilon$ (постоји интервал произвољно мале дужине), тада је такво x јединствено.



Сл. 1

Доказ. а) Посматрајмо скуп $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Он је свакако непразан (мада може имати и само један елемент). Докажимо и да је ограничен. Наиме, сваки број b_k је горње ограничење скупа S. Да бисмо се у то уверили довољно је доказати да је

$$a_n \leq b_k \tag{5}$$

за ма које природне бројеве n и k. Заиста, ако је $n \leq k$, онда је $a_n \leq a_k \leq b_k$, а ако је $n \geq k$, онда је $a_n \leq b_n \leq b_k$, и то зато што услов (4) означава да је низ a_n растући, а низ b_n опадајући.

Према аксиоми супремума, постоји $x = \sup S$. Доказаћемо да је x тражени број. Најпре x је једно горње ограничење скупа S, па је већи од свих његових елемената. Зато је за све n, $x \geq a_n$. С друге стране сви елементи низа b_n су, због (5) горња ограничења скупа S, а x је супремум, односно најмање горње ограничење, па је и за све n, $x \leq b_n$;

б) Ваља нам доказати јединственост под додатним условом да постоји интервал произвољно мале дужине. Претпоставимо супротно да постоје два различита броја $x, y \in [a_n, b_n]$ за све n. Узмимо да је $x < y$, и одаберимо $\varepsilon < y - x$. Нека је n природан број такав да је $b_n - a_n < \varepsilon$. Тада је

$$b_n < a_n + \varepsilon < a_n + y - x < y < b_n,$$

што је немогуће. □

1.21. Став [Лебег]. Нека је дат интервал $[x, y]$, и фамилија интервала (a_α, b_α), $\alpha \in A$, таква да је

$$\bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha) \supseteq [x, y]. \tag{6}$$

Тада постоји коначан подскуп $A_0 \subseteq A$, такав да је

$$\bigcup_{\alpha \in A_0} (a_\alpha, b_\alpha) \supseteq [x, y].$$

Примедба: Фамилија скупова са особином (6) назива се *покривање* скупа $[x, y]$. Стога се овај став речима може уобличити и овако: „Из сваког покривања сегмента $[x, y]$ отвореним интервалима, може се издвојити коначно потпокривање“.

Доказ. Нека је $z \in [x, y]$. Уочимо својство

$$\mathcal{P}(z): \quad \exists A_z \subseteq A \text{ коначан } \bigcup_{\alpha \in A_z} (a_\alpha, b_\alpha) \supseteq [x, z]$$

и скуп $S = \{z \in [x, y] \mid z \text{ има својство } \mathcal{P}(z)\}$, односно скуп оних z-ова, за које се може издвојити коначно потпокривање интервала $[x, z]$.

Очигледно $x \in S$, јер је $[x, x]$ једна тачка и може се покрити само једним (чак) интервалом из наше фамилије. Циљ је да докажемо да $y \in S$.

Очигледно је S непразан ($x \in S$) и одозго ограничен (по дефиницији је $S \subseteq [x, y]$), па има супремум, према ($A16$). Означимо га са σ.

1° корак. Докажимо да $\sigma \in S$. Претпоставимо супротно, да $\sigma \notin S$. Како је $\sigma \in [x, y]$, то свакако $\sigma \in (a_\beta, b_\beta)$, за неко $\beta \in A$. Како је $a_\beta < \sigma$, то постоји $z \in S$ такво да је $a_\beta < z \le \sigma$. Тада се сегмент $[x, z]$ може покрити са коначно много интервала, то јест, постоји $A_0 \subseteq A$ коначан, такав да је $\bigcup_{\alpha \in A_0} (a_\alpha, b_\alpha) \supseteq [x, z]$. Но, како је $(a_\beta, b_\beta) \supseteq (z, \sigma)$, то је

$$\bigcup_{\alpha \in A_0 \cup \{\beta\}} (a_\alpha, b_\alpha) \supseteq [x, \sigma],$$

па отуда $\sigma \in S$.

2° корак. Докажимо да је $\sigma = y$. Претпоставимо супротно, да је $\sigma < y$. Како знамо $\sigma \in S$, па постоји коначан $A_0 \subseteq A$, за који важи $[x, \sigma] \subseteq \bigcup_{\alpha \in A_0} (a_\alpha, b_\alpha)$. Нека је $\alpha_0 \in A_0$ такво да $\sigma \in (a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0})$. Одаберимо $\varepsilon > 0$ такво да је $\varepsilon < b_{\alpha_0} - \sigma$ и $\varepsilon < y - \sigma$. Тада је, очито и $[x, \sigma + \varepsilon] \subseteq \bigcup_{\alpha \in A_0} (a_\alpha, b_\alpha)$, то јест $\sigma + \varepsilon \in S$. Контрадикција.

Дакле, $y = \sigma \in S$. Крај. □

ФУНКЦИЈА ЦЕО ДЕО И ДЕЦИМАЛНИ ЗАПИС

1.22. Дефиниција. Нека је $x > 0$. *Цео део* броја x дефинишемо као

$$[x] = \min\{n \in \mathbf{N} \,|\, n \cdot 1 > x\} - 1.$$

Скуп чији минимум тражимо није празан на основу Архимедовог својства, а узимамо да сваки непразан подскуп скупа $\mathbf{N}$ има најмањи елемент.

Ако је $x < 0$, онда је

$$[x] = \begin{cases} -x, & x \in \mathbf{Z} \\ -[-x] - 1, & \text{иначе} \end{cases},$$

а једноставно видимо да је то исто што и

$$\min\{n \in \mathbf{Z} \,|\, n \cdot 1 > x\} - 1.$$

Следећа карактеризација функције „цео део“, вишеструко је корисна:

$[x]$ је јединствен цео број, такав да важи

$$[x] \le x < [x] + 1. \tag{7}$$

Ова карактеризација је непосредна последица дефиниције.

Прва децимала реалног броја x је број

$$d_1 = [10x] - 10[x],$$

друга децимала је

$$d_2 = [100x] - 100[x] - 10d_1,$$

и тако редом. Индуктивно се може дефинисати да је *n-та децимала* реалног броја x једнака

$$d_n = [10^n x] - 10^n[x] - \sum_{k=1}^{n-1} d_k 10^{n-k}, \tag{8}$$

или у расписаном облику

$$d_n = [10^n x] - 10^n[x] - 10^{n-1}d_1 - 10^{n-2}d_2 - \dots 10d_{n-1}.$$

Ознаку $[x], d_1d_2d_3\dots$ називамо децимални запис реалног броја x.

Уколико у дефиницији (8) број 10 заменимо неким другим природним бројем p, онда ћемо уместо децималног записа добити запис у систему са основом p. О томе више видети у вежбању 8.

1.23. Став. а) $x = \sup\limits_{n \ge 1} \left\{ \dfrac{[nx]}{n} \,\Big|\, n \in \mathbf{N} \right\}$;

б) Ако је $x \in \mathbf{Q}$, онда се у претходној једнакости sup претвара у max.

Доказ. а) x је горње ограничење наведеног скупа, јер је за све n, $\dfrac{[nx]}{n} \le x$, што је еквивалентно са (7). Докажимо да је то и најмање горње ограничење. Уочимо $\varepsilon > 0$ и одаберимо $n \in \mathbf{N}$ са особином $n\varepsilon > 1$, што можемо на основу Архимедовог својства. Тада ће, због (7), бити

$$x - \varepsilon < x - \frac{1}{n} = \frac{nx - 1}{n} < \frac{[nx] + 1 - 1}{n},$$

а последњи број припада наведеном скупу. Отуда $x-\varepsilon$ не може бити горње ограничење;

б) Ако је $x\in\mathbf{Q}$, на пример $x=\dfrac{p}{q}$, где је $p\in\mathbf{Z}$, а $q\in\mathbf{N}$, тада $x=\dfrac{p}{q}=\dfrac{[qx]}{q}\in S$. □

1.24. Став. Нека су $d_1,d_2,\dots$ децимале реалног броја x. Тада:

а) За све $k\in\mathbf{N}$ је $d_k\in\{0,1,2,\dots,9\}$;

б) За све природне бројеве n важи

$$[x]+\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{10^k}\le x<[x]+\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{10^k}+\frac{1}{10^n};\tag{9}$$

в) Ако означимо $x_n=[x]+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{d_k}{10^k}$, онда је

$$x=\sup\{x_n\mid n\in\mathbf{N}\}.\tag{10}$$

Доказ. а) Ако (7) применимо на број $10x$, добијамо $[10x]\le 10x<[10x]+1$, а одатле поновном применом (7) на сам број x,

$$\begin{gathered}[10x]\le 10x<10[x]+10\\ [10x]>10x-1\ge 10[x]-1\end{gathered}\tag{11}$$

Одатле је $d_1=[10x]-10[x]>10[x]-1-10[x]=-1$, па је $d_1\ge 0$, јер је очито реч о целом броју. С друге стране $d_1=[10x]-10[x]\le 10[x]+10-10[x]=10$, па је и $d_1\le 9$.

Овиме смо доказали тврдњу за $k=1$. Слично се показује и за веће k-ове:

$$\begin{aligned}d_n=[10^nx]-10^n[x]-\sum_{k=1}^{n-1}d_k10^{n-k}&<10[10^{n-1}x]+10-10^n[x]-\sum_{k=1}^{n-1}d_k10^{n-k}=\\ &=10\left([10^{n-1}x]-10^{n-1}[x]-\sum_{k=1}^{n-2}d_k10^{n-1-k}-d_{n-1}\right)+10=10\end{aligned}$$

и слично

$$\begin{aligned}d_n=[10^nx]-10^n[x]-\sum_{k=1}^{n-1}d_k10^{n-k}&>10[10^{n-1}x]-1-10^n[x]-\sum_{k=1}^{n-1}d_k10^{n-k}=\\ &=10\left([10^{n-1}x]-10^{n-1}[x]-\sum_{k=1}^{n-2}d_k10^{n-1-k}-d_{n-1}\right)-1=0-1=-1\end{aligned}$$

б) За $n=1$ имамо

$$[10x]\le 10x<[10x]+1,$$

односно када одузмемо $10[x]$, и подсетивши се да је $d_1=[10x]-10[x]$,

$$d_1\le 10x-10[x]<d_1+1,$$

што је еквивалентно траженој неједнакости.

Слично чинимо и за остале n. Наиме, из (7) имамо

$$[10^nx]\le 10^nx<[10^nx]+1,$$

што када одузмемо $10^n[x] + \sum\limits_{k=1}^{n-1} d_k 10^{n-k}$, постаје

$$d_n \le 10^n x - 10^n[x] - \sum_{k=1}^{n-1} d_k 10^{n-k} < d_n + 1,$$

што је еквивалентно траженој неједнакости, после дељења са 10^n;

в) Најпре, уочимо да је увек $10^n > n$, што се лако изводи индукцијом.

Из левог дела неједнакости (9) очито је x горње ограничење скупа $\{x_n\}$. Међутим оно је и најмање, јер ако одаберемо $\varepsilon > 0$, онда постоји $n \in \mathbf{N}$ такво да је $1 < n\varepsilon < 10^n \varepsilon$, односно $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, и тада је из десног дела неједнакости (9) $x < x_n + \frac{1}{10^n} < x_n + \varepsilon$, односно $x - \varepsilon < x_n$. $\square$

1.25. Запажања. Помоћу дефиниција (8) сваком реалном броју додељен је његов децимални запис. То пресликавање је због претходног става инјективно. Наиме, ако два различита реална броја x и y имају исти децимални запис, онда се скупови $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ поклапају, па имају исти супремум. Отуда је $x = y$.

С друге стране, могуће је једнакошћу (10) сваком децималном запису доделити један реалан број. Међутим то додељивање није више инјективно. Наиме децималним записима $1,000\ldots$ и $0,999\ldots$ доделићемо исти реалан број 1!

Тако је скуп децималних записа нешто шири, већи од скупа реалних бројева. О томе који су све децимални записи „вишак“ видети вежбање 7.

ПРЕБРОЈИВИ И НЕПРЕБРОЈИВИ СКУПОВИ

1.26. Дефиниција. Кажемо да скупови A и B имају исти *кардинални број* ако постоји бијекција $f : A \to B$. Кардинални број скупа A означавамо са $\operatorname{Card} A$.

Ако су скупови A и B коначни (односно имају коначно много елемената) онда они имају исти кардинални број ако и само ако имају исти број елемената.

Кардинални број празног скупа је $\operatorname{Card} \emptyset = 0$, а кардинални број ма ког n-точланог скупа је n. На пример $\operatorname{Card}\{1, 2, \ldots, n\} = n$.

Ово је била нешто слободнија дефиниција. Формалније је међу скуповима увести релацију еквиваленције $A \sim B$ ако и само ако постоји бијекција $f : A \to B$, па да се онда кардинални број дефинише као класа еквивалентних скупова. Овде даље искрсавају проблеми јер постојање скупа свих скупова доводи до парадокса у наивној теорији скупова, цехму није место у курсу анализе, већ математичке логике.

Кардинални број скупа природних бројева означавамо са $\operatorname{Card} \mathbf{N} = \aleph_0$. У питању је прво слово јеврејске азбуке и чита се „алеф“. За скуп који има кардинални број $\aleph_0$ кажемо да је *пребројив*. Пребројивост неког скупа еквивалентна је интуитивном појму да се тај скуп може „поређати у низ“ (бесконачан). Заиста, ако је скуп $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, тада се бијекција $f : \mathbf{N} \to A$ постиже на једноставан начин путем $f(n) = a_n$. Тако се сасвим једноставно може видети да је сваки подскуп скупа $\mathbf{N}$ или коначан, или пребројив.

Међу кардиналним бројевима може се увести и поредак. Кажемо да је $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$ уколико постоји ињекција ($1-1$ пресликавање) $f : A \to B$. Сасвим једноставно се види да ова релација не зависи од скупова A и B већ само од њихових кардиналних бројева. Заиста, ако A и A', односно B и B' имају исти кардинални број, онда постоје бијекција $g : A \to A'$ и $h : B \to B'$, па ако је $f : A \to B$ ињективно, онда је и $h \circ f \circ g^{-1} : A' \to B'$ такође ињективно. Такође, сасвим је једноставно видети да је ова релација рефлексивна ($id : A \to A$ идентичко пресликавање је ињективно) и транзитивна (композиција ињективних је ињективно). Антисиметричност ћемо доказати у наредном Ставу.

Све оне скупове који нису ни коначни ни пребројиви зовемо *непребројиви*. Јасно је да су непребројиви скупови већи и од пребројивих и од коначних. Међу непребројивим скуповима има више различитих кардиналних бројева.

1.27. Став [Кантор-Бернштајн]. Ако постоје $f : A \to B$ и $g : B \to A$, $1-1$ функције, онда постоји $h : A \underset{\text{НА}}{\overset{1-1}{\to}} B$. Другим речима, релација $\leq$ међу кардиналним бројевима је антисиметрична.

Груба скица доказа. Формирамо скупове C_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ и скуп S на следећи начин

$$C_0 = A \setminus g(B), \qquad C_{n+1} = (g \circ f)(C_n), \qquad S = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n.$$

Одмах се види да је

$$C_n = (g \circ f)^n (A \setminus g(B)), \qquad S = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (g \circ f)^n (A \setminus g(B)).$$

Дерфинишимо функцију $h : A \to B$ са

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S \\ g^{-1}(x), & x \notin S \end{cases}.$$

Функција је коректно дефинисана, јер из $x \notin S$ излази $x \notin C_0$, а одатле $x \in g(B)$, па постоји јединствено $y \in B$, такво да је $g(y) = x$.

Докажимо да је $1-1$. Заиста једнакост $h(x_1) = h(x_2)$ своди се на $f(x_1) = f(x_2)$, $g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2)$ или $f(x_1) = g^{-1}(x_2)$, у зависности од тога где се налазе x_1 и x_2. У прва два случаја непосредно добијамо $x_1 = x_2$ позивајући се на то да је функција f, односно g^{-1} ињективна. У трећем случају, када $x_1 \in S$, $x_2 \notin S$, из $f(x_1) = g^{-1}(x_2)$, добијамо $(g \circ f)(x_1) = x_2$, одакле и $x_2 \in S$ што је контрадикција. Зато је h ињективна.

Докажимо да је НА. Заиста, ако $y \in B$, тада или $g(y) \notin S$ или $g(y) \in S$. У првом случају је $y = g^{-1}(g(y)) = h(g(y))$ и то је крај. У другом случају је за неко n, $g(y) \in C_n$ и то n не може бити нула, јер C_0 не сече $g(B)$. Дакле, $g(y) = (g \circ f)^n(x)$ за неко x. Но, тада је

$$g(y) = g(f((g \circ f)^{n-1}(x))),$$

односно, због ињективности пресликавања g,

$$y = f((g \circ f)^{n-1}(x)) = h((g \circ f)^{n-1}(x)).$$

$\square$

1.28. Став. Скупови $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Q}$ су пребројиви.

Доказ. Скуп $\mathbf{N}$ је пребројив по дефиницији.
Скуп $\mathbf{Z}$ је пребројив, јер је пресликавање $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, дато са

$$\varphi(k) = \begin{cases} 2k, & k > 0 \\ 1 - 2k, & k \leq 0 \end{cases},$$

бијекција.

Пребројивост скупа $\mathbf{Q}$ доказујемо на следећи начин. Све позитивне рационалне бројеве поређамо у бесконачну таблицу на следећи начин

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & \curvearrowright & & & & \curvearrowright & \\
 & 1/1 & & 1/2 & & 1/3 & & 1/4 \\
 & & & & & & & \\
\nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 & 2/1 & & 2/2 & & 2/3 & & 2/4 \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow &
\end{array}$$

а затим их поређамо у низ онако како то показују стрелице. Јасно је да се сви позитивни рационални бројеви налазе у горњој таблици. Наиме број p/q наћи ћемо у пресеку p-те врсте и q-те колоне. Међутим неки од њих се овде налазе више пута, на пример разломци $2/5$, $4/10$, $6/15$ јесу један те исти рационалан број. Зато из добијеног низа прецртамо сувишне бројеве.

Можемо и формализовати мало пре добијену бијекцију између скупова $\mathbf{N}$ и $\mathbf{Q}^+$. Наиме, ређање горње таблице у низ јесте функција $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}^+$, дата са

$$\varphi(n) = \varphi\left(\frac{m(m+1)}{2} + k\right) = \begin{cases} \dfrac{k}{m+2-k}, & m \text{ парно} \\[2ex] \dfrac{m+2-k}{k}, & m \text{ непарно} \end{cases},$$

при чему је n на јединствен начин приказан као $n = m(m+1)/2 + k$, где је $m \geq 0$, и $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, а може и експлицитно $m = \min\{j \in \mathbf{N} \,|\, j(j+1)/2 \geq n\}$, $k = n - m(m+1)/2$. Функција φ је „НА“, али није $1-1$. Међутим, тада постоји инјективна функција $\psi : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{N}$. Како је иденичко пресликавање $id : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}^+$, дато са $id(n) = n$ очигледно инјекција, то према Кантор Бернштајновој теореми постоји бијекција $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}^+$.

Сада није тешко конструисати бијекцију $h : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$. Наиме, ставимо

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ f(n/2), & n \text{ парно} \\ -f((n-1)/2), & n \text{ непарно} \end{cases}.$$

$\square$

1.29. Став [Кантор]. Скуп $\mathbf{R}$ је непребројив.

Доказ. Даћемо два доказа ове тврдње. Први потиче од самог Кантора. За почетак доказујемо да је интервал $(0, 1)$ непребројив. Претпоставимо супротно, то јест да се он може поређати у низ: $(0,1) = \{x_1, x_2, \dots\}$, и нека су децимални записи тих бројева дати са

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\dots\alpha_{1n}\dots \\ x_2 &= 0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\dots\alpha_{2n}\dots \\ x_3 &= 0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\dots\alpha_{3n}\dots \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n &= 0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\dots\alpha_{nn}\dots \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Одаберимо цифре β_k, такве да је $\beta_k \neq \alpha_{kk}$. Тада број y са децималним записом

$$y = 0, \beta_1\beta_2\beta_3\dots\beta_n$$

није обухваћен списком. Наиме, $y \neq x_k$, јер се њихове k-те децимале разликују.

Истина постоје различити децимални записи за један исит број, али је тада, видети вежбање 7, нужно да у једном од њих буде $\beta_k = 9$ за све k почевши од неког. И тада само треба додати услов $\beta_k \neq 9$, што сужава избор али не превише.

Када смо доказали да је $(0,1)$ непребројив, природно је закључити да ни $\mathbf{R}$ не може бити пребројив, као још већи скуп. И заиста, ако претпоставимо да је $\mathbf{R}$ пребројив, онда постоји бијекција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{N}$, чија је рестрикција $f|_{(0,1)} : (0,1) \to \mathbf{N}$ онда инјективно пресликавање. Даље, функција $g : \mathbf{N} \to (0,1)$, дата са $g(n) = 1/n$ такође је инјекција, па према Кантор Бернштајновој теореми постоји бијекција $h : \mathbf{N} \to (0,1)$, што смо већ показали да је немогуће. $\square$

Друкчији доказ. дат је овако:

Претпоставимо супротно, да је $\mathbf{R} = \{x_1, x_2, \dots\}$ пребројив. Формирамо низ уметнутих сегмената на следећи начин.

$$a_1 = x_{l_1} = x_1;$$

$$b_1 = x_{m_1}, \quad x_{m_1} \text{ је први по реду већи од } a_1;$$

$$a_2 = x_{l_2}, \quad x_{l_2} \text{ је први после } x_{m_1} \text{ који } \in [a_1, b_1];$$

$$b_2 = x_{m_2}, \quad x_{m_2} \text{ је први после } x_{l_2} \text{ који } \in [a_2, b_1]...$$

Прецизније (мада мање разумљиво) то се може записати овако:

$$l_1 = 1, \qquad l_k = \min\{n \,|\, n > m_{k-1},\ x_n \in [x_{l_{k-1}}, x_{m_{k-1}}]\},$$

$$m_k = \min\{n \,|\, n > l_k,\ x_n \in [x_{l_k}, x_{m_{k-1}}]\},$$

$$a_k = x_{l_k}, \qquad b_k = x_{m_k}.$$

Очигледно важи $[a_k, b_k] \supseteq [a_{k+1}, b_{k+1}]$, па према Канторовом ставу 1.20, постоји $x \in \mathbf{R}$, такво да је $x \in [a_k, b_k]$, за све k. Нека је то, на пример x_j. Тако је за све k тачно $a_k \leq x_j \leq b_k$, односно

$$x_{l_k} \leq x_j \leq x_{m_k}.$$

Последње је, међутим немогуће, јер интервал $[x_{l_k}, x_{m_k}]$, према дефиницији не садржи елементе са мањим индексима. $\square$

1.30. Запажања. 1°) Једно време, стајало је отворено питање, има ли других кардиналних бројева између $\aleph_0$ и $c = \operatorname{Card}\mathbf{R}$, или нема. Другим речима стајала је отворена хипотеза:

Ако је $A \subseteq \mathbf{R}$, *онда је или* $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card}\mathbf{R} = c$ *или* $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card}\mathbf{N} = \aleph_0$.

Ова хипотеза позната је под називом *Хипотеза континуума.* Они који су је прихватали кардинални број скупа $\mathbf{R}$ означавали су са $\aleph_1$ (као први следећи). Међутим, Пол Коен, доказао је 1963. године да је хипотеза континуума независна од осталих аксиома теорије скупова, познатих као *Цермело Френкелове аксиоме.*

2°) Међусобно нееквивалентних скупова, односно различитих кардиналних бројева има много. Заправо, толико много да је свеукупност таквих објеката толико гломазна (слично свеукупности свих скупова) да ако би је назвали скуп онда би пореметила аксиоме теорије скупова, односно довела би до парадокса у наивној теорији.

Са становишта анализе, међутим, довољно је да разликујемо коначне, пребројиве и непребројиве скупове.

ГУСТИНА СКУПОВА R И Q

1.31. Став. Нека су a и b реални бројеви и $a < b$.
а) постоји $x \in \mathbf{Q}$ такво да је $a < x < b$;
б) постоји $x \notin \mathbf{Q}$ такво да је $a < x < b$;
в) За свако $x \in \mathbf{R}$ је $x = \sup L_x$, где је $L_x = \{y \in \mathbf{Q} \mid y < x\}$.

Доказ. а) Ако су $a, b \in \mathbf{Q}$, онда се x једноставно може добити као $x = (a+b)/2$.

Нека је, сада, $b \notin \mathbf{Q}$. Тада је, према Ставу 1.23,

$$b = \sup\left\{\frac{[bn]}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\},$$

па тада за неко n важи $a < [bn]/n \leq b$, према леми о карактеризацији супремума. Међутим, последња неједнаксот је строга, јер $[bn]/n \in \mathbf{Q}$, а $b \notin \mathbf{Q}$.

Остао је још случај $a \notin \mathbf{Q}$ и $b \in \mathbf{Q}$. Тада применимо претходни случај на бројеве $-b < -a$. Тада постоји рационално $x \in (-b, -a)$. Број $-x$ је тражени број.

б) Претпоставимо супротно, да су сви бројеви из интервала (a, b) рационални. Тада је скуп $(a, b) \subseteq \mathbf{Q}$ пребројив. Међутим, захваљујући бијективном пресликавању $\varphi : (0,1) \to (a,b)$, $f(x) = a + x(b-a)$, такав је, онда и интервал $(0,1)$, што је у супротности са Ставом о непребројивости реалних бројева 1.29;

в) Број x је очито горње ограничење скупа L_x. Међутим, оно је и најмање такво, јер се за $\varepsilon > 0$ између бројева $x - \varepsilon$ и x налази бар један рационалан број, односно постоји бар једно $y \in L_x$ које је веће од $x - \varepsilon$, па $x - \varepsilon$ не може бити горње ограничење. $\square$

СТЕПЕНОВАЊЕ И КОРЕНОВАЊЕ

1.32. Степена функција (степена $n \in \mathbf{N}$) је функција $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дата са $f_n(x) = x^n$.

Сасвим једноставно се показује да је за n парно, функција f_n строго растућа на интервалу $[0, +\infty)$, а строго опадајућа на интервалу $(-\infty, 0]$. Наиме, применом Става 1.8 б), добијамо да из $0 \le x < y$ следи $x^n < y^n$, односно $f_n(x) < f_n(y)$, док за $x < y \le 0$, важи $0 \le -y < -x$, па је $y^n = (-y)^n < (-x)^n = x^n$. На сличан начин, изводи се да је f_n строго растућа на читавом $\mathbf{R}$, у случају да је n непарно.

1.33. Став [о егзистенцији корена]. Нека су $a > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ произвољни бројеви. Тада постоји јединствен $x > 0$, такав да је $x^n = a$.

Доказ. Посматрајмо скуп $S = \{x > 0 \,|\, x^n \le a\}$.

Као прво, скуп S није празан. У случају да је $a \le 1$, тада $a \in S$, јер је $a^n = a \cdot a^{n-1} \le a \cdot 1$. У случају да је $a > 1$, тада $1 \in S$, јер је $1^n = 1 \le a$.

Као друго, скуп S је ограничен одозго. У случају $a \le 1$ једно горње ограничење је 1, јер за $x \in S$ имамо $x^n \le a \le 1 = 1^n$, па ако $x > 1$ онда $x^n > 1^n$ - контрадикција. У случају $a > 1$ једно горње ограничење је a, јер за $x \in S$ имамо $x^n \le a = a \cdot 1^{n-1} \le a^n$, па ако $x > a$ онда $x^n > a^n$ - контрадикција.

Дакле, према аксиоми супремума постоји $\sigma = \sup S$. Постоје три могућности: $\sigma^n < a$, $\sigma^n = a$, $\sigma^n > a$. Искључићемо прву и трећу.

Ако је $\sigma^n < a$, онда уочимо $\varepsilon > 0$ са особинама $\varepsilon < 1$ и $\varepsilon < (a - \sigma^n)/A$, где је $A = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sigma^{n-k}$, и тада ће бити

$$(\sigma + \varepsilon)^n = \sigma^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \sigma^{n-k} \le \sigma^n + \varepsilon A < a,$$

одакле $\sigma + \varepsilon \in S$, па σ није горње ограничење - контрадикција.

Ако је $\sigma^n > a$, онда уочимо $\varepsilon > 0$ са особинама $\varepsilon < 1$ и $\varepsilon < (\sigma^n - a)/A$, где је $A = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sigma^{n-k}$, и тада ће бити

$$(\sigma - \varepsilon)^n = \sigma^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \varepsilon^k \sigma^{n-k} \le \sigma^n - \varepsilon A > a,$$

одакле је $\sigma - \varepsilon$ горње ограничење скупа S, јер за $x \in S$ имамо $(\sigma - \varepsilon)^n > a \ge x^n$, то јест $\sigma - \varepsilon > x$ - контрадикција.

Дакле, $\sigma^n = a$.

Јединственост је једноставна. Заиста, ако постоје $x \ne y$ позитивни такви да је $x^n = y^n = a$, тада је или $0 < x < y$, одакле следи $a = x^n < y^n = a$, или $0 < y < x$ одакле на исти начин следи контрадикција. □

1.34. Кореновање. На основу претходног става, степена функција f_n посматрана на интервалу $[0, +\infty)$ јесте бијекција. Инјективна је, јер је строго растућа, а сурјективна је на основу Става о егзистенцији корена. Ако уместо

$f_n : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ степену фуннкцију посматрамо на читавом $\mathbf{R}$, дакле као $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, онда разликујемо случајеве n парно и n непарно.

Наиме, ако је n парно тада таква функција не може бити $1-1$, јер је $f_n(-x) = f_n(x)$, а не може бити ни „НА“, јер никада није $f_n(x) < 0$. Међутим за n непарно је f_n бијекција на $\mathbf{R}$. Заиста, тада f_n преводи позитивне у позитивне, а негативне у негативне бројеве и увек је строго растућа, па је инјективна. Још да је „НА“. Ако је $a > 0$ тада постоји $x > 0$ са особином $f_n(x) = a$ према претходном Ставу. Ако је $a = 0$, тада $f_n(0) = 0$, и најзад, ако је $a < 0$, тада $-a > 0$, па постоји $y > 0$ такво да је $y^n = -a$, и тада је за $x = -y$, $x^n = (-y)^n = -y^n = -(-a) = a$.

Корену функцију g_n дефинишемо као инверзну функцију степене функције f_n. За n парно $g_n : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, а за n непарно $g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Корену функцију означавамо

$$g_n(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

Ако је $q = m/n$ позитиван рационалан број, при чему су m и n узајамно прости бројеви, односно несводљив разломак, онда степену функцију $x \mapsto x^q$ дефинишемо као

$$x^q = (x^{1/n})^m = f_m(g_n(x)). \tag{12}$$

Овде треба водити рачуна о томе шта је домен овакве функције. Наиме, ако је n непарно, онда израз у (12) има смисла за све $x \in \mathbf{R}$, док за n парно, он има смисла само за $x \geq 0$. Тако је $x^{2/3}$ дефинисано за све $x \in \mathbf{R}$, а $x^{3/4}$ само за $x > 0$.

Ако је $q = 0$ и $x \neq 0$, дефинишемо $x^0 = 1$ и најзад, ако је $q < 0$, онда дефинишемо

$$x^q = \frac{1}{x^{-q}},$$

при чему мора бити $x > 0$ уколико је именилац броја q паран, а $x \neq 0$, уколико је именилац броја q непаран.

1.35. Став [особине степене функције]. Нека су $x, y \in \mathbf{R}$ и $p, q \in \mathbf{Q}$. Тада важи

а) $(xy)^q = x^q y^q$;
б) $x^{p+q} = x^p x^q$;
в) $(x^p)^q = x^{pq}$;

Примедба: Упозорава се читалац да је доказ овог Става веома досадан, те се препоручује да се приликом првог читања изостави, нарочито ако читалац добро барата рачуницом са степенима и коренима.

Доказ. Најпре ћемо ове особине доказати за случај када су p и q природни бројеви. Прва особина је комутативност и асоцијативност множења, јер је

$$(xy)^q = \underbrace{(xy)(xy)\dots(xy)}_{q \text{ пута}} = \underbrace{xx\dots x}_{q \text{ пута}}\underbrace{yy\dots y}_{q \text{ пута}} = x^q y^q;$$

Друга је само асоцијативност, јер је

$$x^{p+q} = \underbrace{xx\dots x}_{p+q \text{ пута}} = \underbrace{xx\dots x}_{p \text{ пута}}\underbrace{xx\dots x}_{q \text{ пута}}.$$

Трећа је, такође, само асоцијативност, јер је

$$\begin{aligned} x^{pq} &= \underbrace{xx\ldots x}_{pq \text{ пута}} = \\ &= \underbrace{\underbrace{xx\ldots x}_{p \text{ пута}}\underbrace{xx\ldots x}_{p \text{ пута}}\ldots\underbrace{xx\ldots x}_{p \text{ пута}}}_{q \text{ пута}} = \\ &= (\underbrace{x^p x^p \ldots x^p}_{q \text{ пута}}) = (x^p)^q. \end{aligned}$$

Из треће особине видимо и да функције f_m и g_n комутирају, јер је

$$f_n(f_m(g_n(x))) = \Big((x^{1/n})^m\Big)^n = \Big((x^{1/n})^n\Big)^m = x^m = f_m(x),$$

одакле је $f_m \circ g_n = g_n \circ f_m$, то јест $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$.

Сада ћемо претпоставити да су $p = 1/m$ и $q = 1/n$ реципрочне вредности природних бројева. Означимо $x^{1/n} = a$ и $y^{1/n} = b$. Тада је према већ доказаном $(ab)^n = a^n b^n = xy$, одакле је $x^{1/n} y^{1/n} = ab = (xy)^{1/n}$, што доказује прву особину.

За трећу, имамо

$$\left(\left(x^{\frac{1}{n}\frac{1}{m}}\right)^m\right)^n = \left(x^{\frac{1}{nm}}\right)^{mn} = x,$$

одакле добијамо резултат узастопном применом функција g_n и g_m.

За другу, ставимо $x = a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$, тада је $x^{1/m} = a^n$ и $x^{1/n} = a^m$, и

$$x^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = (a^{mn})^{\frac{m+n}{mn}} = \left((a^{mn})^{\frac{1}{mn}}\right)^{m+n} = a^{m+n} = a^m a^n = x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{m}}.$$

Нека су сада, $q = m/n$ и $p = k/l$ позитивни рационални бројеви. Тада за прву особину имамо

$$(xy)^q = \left((xy)^{1/n}\right)^m = \left(x^{1/n} y^{1/n}\right)^m = \left(x^{1/n}\right)^m \left(y^{1/n}\right)^m = x^q y^q.$$

За другу је

$$x^{p+q} = x^{\frac{ml+nk}{nl}} = \left(x^{1/nl}\right)^{ml+nk} = \left(x^{1/nl}\right)^{ml} \left(x^{1/nl}\right)^{nk} = x^q x^p.$$

За трећу је

$$(x^p)^q = \left(\left((x^{1/l})^k\right)^{1/n}\right)^m = \left(\left((x^{1/l})^{1/n}\right)^k\right)^m = (x^{1/nl})^{km} = x^{pq}$$

.

Слично се проверавају и ако је неки од бројева p, q једнак нули или негативан. □

КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

1.36. Дефиниција. На скупу $\mathbf{R}^2 = \{(x,y) \,|\, x, y \in \mathbf{R}\}$ уређених парова реалних бројева уводимо операције сабирања и множења помоћу

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y'),$$

$$(x,y)\cdot(x',y') = (xx'-yy', xy'+yx').$$

Уређене парове реалних бројева са овако уведеним оепрацијама $+$ и $\cdot$ називамо *комплексни бројеви* и означавамо са $\mathbf{C}$.

Једноставно се проверава да комплексни бројеви у односу на опеацију $+$ задовољавају аксиоме $(A1)-(A4)$ са списка аксиома уређеног поља, при чему је неутрални елемент $(0,0)$ и њега ћемо краће означавати 0, док је супротни елемент елемента (x,y), дат са $(-x,-y)$. Нешто сложеније је проверити да множење задовојава аксиоме $(A5)-(A8)$, као и аксиому $(A9)$, али се то своди на обичну рачуницу. При томе неутрални елемент за множење је уређен пар $(1,0)$ кога краће означавамо са 1, а инверзни елемент не-нултог елемента (x,y) дат је са $(x/(x^2+y^2), -y/(x^2+y^2))$. Проверићемо ово последње. Према дефиницији имамо

$$(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=$$
$$=\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{-y^2}{x^2+y^2},\frac{-xy}{x^2+y^2}+\frac{yx}{x^2+y^2}\right)=(1,0).$$

На тај начин, структура $(\mathbf{C},+,\cdot)$ јесте једно поље, што значи да у њему важе сва правила рачунања са $+$ и $\cdot$ које смо до сада извели. Оно није уређено јер нисмо дефинисали релацију $\leq$. Нешто касније видећемо да се ту поредак ни не може увести, тако да добијемо уређено поље.

Пресликавање $\Phi:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$, дато са $\Phi(x)=(x,0)$ јесте хомоморфизам поља, јер очигледно важи $\Phi(0)=0$, $\Phi(1)=1$, $\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)$, $\Phi(x\cdot y)=\Phi(x)\cdot\Phi(y)$, и још је инјективно, па $\mathbf{R}$ можемо поистоветити са његовом сликом $\Phi(\mathbf{R})=\{(x,0)\,|\,x\in\mathbf{R}\}\subseteq\mathbf{C}$.

Имагинарна јединица је број $(0,1)\in\mathbf{C}$. Њега означавамо са i. Тај број има занимљиву особину

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1.$$

Одавде се види да $\mathbf{C}$ не може бити уређено поље, јер у сваком уређеном пољу важи $x^2\geq 0$ за све његове елементе, па би у $\mathbf{C}$ имали $-1=i^2\geq 0$, али и $1=1^2\geq 0$, одакле је $1=0$, што је немогуће.

Сваки се комплексан број (x,y) може написати у облику

$$(x,y)=(x,0)\cdot(1,0)+(y,0)\cdot(0,1)=x+yi,$$

имајући у виду наше ознаке. Убудуће ћемо комплексне бројеве записивати на овај други начин $x+yi$, а не као (x,y). Са таквим записом, реалне бројеве поистовећујемо са комплексним бројевима облика $x+0\cdot i$.

Реални део комплексног броја $z=x+yi$, је $\operatorname{Re} z=x$; *имагинарни део* је $\operatorname{Im} z=y$; *конјуговано комплексни број* је $\bar{z}=x-yi$, а *апсолутна вредност* је $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=z\cdot\bar{z}$. Све ове четири функције могу се применити и на реалне бројеве, и тада су оне тривијалне осим у случају апсолутне вредности. Наиме реални део и конјугован број реалног броја су он сам, а имагинарни део је нула. Апсолутна вредност реалног броја је

$$|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

1.37. Став [својства комплексних бројева]. Ако су $z = x + yi$ и $w = u + vi$ два комплексна броја, тада важи

а) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$; $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$; $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;

б) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$; $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$;

в) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$; $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

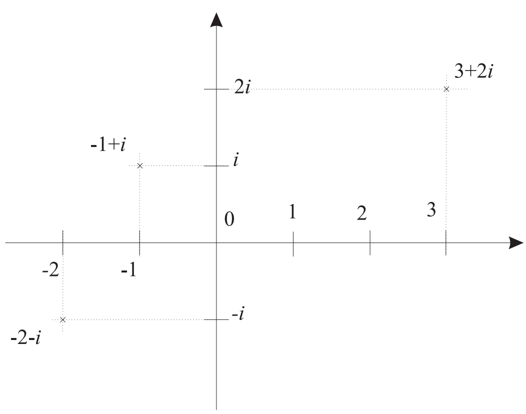
Доказ. а) $|\operatorname{Re} z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$; $|\operatorname{Im} z| = |x| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$; $|z|^2 = x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$;

б) $\overline{z \pm w} = \overline{(x \pm u) + (y \pm v)i} = (x \pm u) - (y \pm v)i = (x - yi) \pm (u - vi) = \overline{z} \pm \overline{w}$; $\overline{z \cdot w} = \overline{xu - yv + (xv + yu)} = xu - yv - (xv + yv)i = (x - yi)(u - vi) = \overline{z}\overline{w}$; за трећу једнакост је довољно доказати $\overline{w^{-1}} = \overline{w}^{-1}$, а то је тачно на основу јединствености инверзног елемента и једнакости $1 = \overline{1} = \overline{ww^{-1}} = \overline{w}\,\overline{w^{-1}}$.

в) лако. $\square$

1.38. Геометријска интерпретација комлексних бројева. Кажу да је Гаус први дошао на идеју да комплексне бројеве представља као тачке равни. Имајући на уму да број i - имагинарна јединица није ни мањи нити већи од нуле, најлогичније је да га сместимо негде изван реалне праве. С друге стране, с почетка комплексне бројеве видимо као уређене парове реалних, а како последњима одговара тачно једна тачка равни у Декартовом координатном систему, то и комплексном броју одговара једна тачка равни.

За потребу геометријског педстављања комплексних бројева уместо x и y-оса, говорићемо *реална* и *имагинарна оса*. На наредној слици представљени су комплексни бројеви $3 + 2i$, $-1 + i$ и $-2 - i$.



Сл. 2

Апсолтна вредност комплексног броја на слици се види као његово растојање од координатног почетка, то јест од нуле. Реални део као пројекцију на реалну осу, имагинарни као пројекцију на имагинарну осу, а конјуговано комплексни број као симетричан у односу на реалну осу.

ВАЖНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

1.39. Неједнакост троугла. За све комплексне бројеве z и w важи

$$|z+w| \le |z| + |w|,$$

при чему знак једнакости важи ако и само ако су z и w истог правца, односно ако постоји позитиван број $\lambda \ge 0$, такав да је или $z = \lambda w$ или $w = \lambda z$

Доказ. Имамо

$$\begin{aligned} |z+w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) &= |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re} z\overline{w} \le \\ &\le |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z|+|w|)^2. \end{aligned}$$

Што се тиче знака једнакости он наступа ако и само ако је $\operatorname{Re} z\overline{w} = |z\overline{w}|$. Установимо када за неки комплексан број $a = \alpha + i\beta$ важи $\operatorname{Re} a = |a|$, односно $\alpha = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. То ће бити ако и само ако је $\beta = 0$ и $\alpha \ge 0$. Тако је $\operatorname{Re} z\overline{w} = |z\overline{w}|$ ако и само ако је $z\overline{w} = \mu \ge 0$, односно (после множења са w) ако и само ако је $z|w|^2 = \mu w$, односно $z = \dfrac{\mu}{|w|^2} w$ ако је $w \ne 0$. Ако је $w = 0$, онда је $w = 0 \cdot z$. $\square$

1.40. Бернулијева неједнакост. Нека је $n \in \mathbf{N}$ и $h \in \mathbf{R}$, $h > -1$. Тада је

$$(1+h)^n \ge 1 + nh, \tag{13}$$

при чему знак једнакости важи ако и само ако је $n = 0$, $n = 1$ или $h = 0$.

Доказ. Индукцијом. За $n = 0$ неједнакост се своди на $1 \le 1$, а за $n = 1$ на $1 + h \le 1 + h$, две несумњиво тачне неједнакости.

Претпоставимо да (13) важи за неки природан број n. Помножимо ту неједнакост са $1 + h > 0$. Добијамо

$$\begin{aligned} (1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \ge (1+nh)(1+h) &= \\ &= 1 + (n+1)h + nh^2 \ge 1 + (n+1)h. \end{aligned}$$

На последњем месту, једнакост важи ако и само ако је $n = 0$ или $h = 0$. Дакле, већ за $n \ge 2$ и $h \ne 0$ важи строга неједнакост. За $n = 0, 1$ и $h = 0$ непосредном провером установљавамо да важи једнакост. $\square$

1.41. Неједнакост аритметичке и геометријске средине. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$ реални бројеви. Тада важи

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \tag{14}$$

при чему једнакост важи ако и само ако су сви бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ међу собом једнаки.

Лева страна у (14) назива се *геометријска средина*, а десна *аритметичка средина* бројева $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Доказ. За $n = 1$ неједнакост се своди на $a_1 \leq a_1$. За $n = 2$, она постаје $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$, што је еквивалентно са $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$.

Индукцијом можемо доказати да је она тачна и за бројеве облика $n = 2^k$. Наиме, узимамо за базу индукције $n = 2$, а затим доказујемо прелаз $n \Rightarrow 2n$:

(15)
$$\sqrt[2n]{a_1 a_2 \dots a_{2n}} = \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}\,\sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}} \leq \frac{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}}{2} \leq$$
$$\leq \frac{\dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \dfrac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}}{2n}$$

Завршни потез је да докажемо да се неједнакост (14) преноси са броја n на број $n - 1$. Овакав начин доказивања назива се *регресивна индукција*. Најпре смо доказали да неједнакост важи за бесконачно много природних бројева - у нашем случају то су бројеви $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$, а затим „попуњавамо рупе“ које су остале између њих, али одозго, од већег броја ка мањем.

Докажимо импликацију $n \Rightarrow n - 1$. Означимо $G = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$. Ако ставимо у (14) $a_n = G$, онда је

$$G = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_1 \dots a_{n-1})^{1/(n-1)}} \leq$$
$$\leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + G}{n},$$

односно

$$nG \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + G,$$

одакле једноставним пребацивањем добијамо тражену неједнакост.

Докажимо да знак једнакости важи ако и само ако су сви бројеви a_1, a_2, $\dots$, a_n међу собом једнаки. За $n = 2$ то је тривијално. Покажимо да се ова тврдња преноси у оба индукцијска корака $n \Rightarrow 2n$ и $n \Rightarrow n-1$. У првом кораку, неједнакост (15), да би важикла једнакост потребно је да буде $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}$, као и $a_1 = \dots = a_n$ и $a_{n+1} = \dots = a_{2n}$, одакле добијамо $a_1 = \dots = a_{2n}$.

У другом индукцијском кораку, потребно је да важи $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = G$, одакле је очигледно $a_1 = \dots a_{n-1}$. □

Примедба: Постоје најразличитија уопштења претходне неједнакости. Нека од њих наведена су у вежбању 10.

1.42. Коши Шварцова неједнакост. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots b_n$ комплексни бројеви. Тада важи

(16)
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2},$$

при чему знак једнакости важи ако и само ако су низови $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ пропорционални, то јест ако и само ако постоје комплексни бројеви λ и μ такви да је за све j $\lambda a_j + \mu b_j = 0$ при чему је $\lambda^2 + \mu^2 > 0$.

Доказ. Означимо најпре,

$$A = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2; \qquad B = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2; \qquad L = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k}.$$

Треба да докажемо да је $|L|^2 \le AB$.

Очигледну неједнакост

$$0 \le |a_j b_k - a_k b_j|^2 = |a_j|^2|b_k|^2 + |a_k|^2|b_j|^2 - a_j b_k \overline{a_k}\overline{b_j} - a_k b_j \overline{a_j}\overline{b_k}, \tag{17}$$

просумирамо по $j = 1, \dots, n$, и добијамо

$$0 \le |b_k|^2 A + |a_k|^2 B - b_k \overline{a_k} L - a_k \overline{b_k L},$$

а затим је просумирамо по $k = 1, \dots, n$ да бисмо добили $0 \le BA + AB - \overline{L}L - L\overline{L}$, односно $0 \le 2AB - 2|L|^2$, што је и требало доказати.

Да би важио знак једнакости, неопходно је да у (17) важи једнакост за све j, k, а то значи да за свако j, k важи

$$a_j b_k = a_k b_j. \tag{18}$$

Ако претпоставимо да је за све k, $b_k \neq 0$ онда се то своди на $a_j/b_j = a_k/b_k = \theta$, односно $a_j = \theta b_j$. Ако је неки $b_k = 0$, онда из (18) видимо да је и $a_k = 0$, уколико је бар једно $b_j \neq 0$. Ако су сви b-ови једнаки нули, ствар је тривијална. □

Примедба: Уопштење Коши Шварцове неједнакости је *Хелдерова неједнакост*. О њој видети вежбање 12.

ДОДАТАК - ЈЕДИНСТВЕНОСТ И ЕГЗИСТЕНЦИЈА РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

Немогуће је, наравно, и то нећемо ни покушавати, да докажемо јединственост реалних бројева. Доказаћемо да су реални бројеви јединствени *до на изоморфизам*. То значи да ако имамо две структуре које задовољавају аксиоме од (A0) до (A16) да оне морају бити изоморфне, дакле истоветне као скупови и са истоветним законима рачунања и поређења. Све тврдње које смо извели о скупу $\mathbf{R}$, почевши од његове дефиниције па до овог тренутка изведене су из аксиома, што значи да важе и за ма који други скуп који задовољава наведене аксиоме. То користимо у доказу јединствености.

1.43. Став [Јединственост реалних бројева]. Нека су $(\mathbf{R}_1, +_1, \cdot_1, \le_1, 0_1, 1_1)$ и $(\mathbf{R}_2, +_2, \cdot_2, \le_2, 0_2, 1_2)$ два уређена поља која задовољавају аксиоме $(A0) - (A16)$, тада постоји изоморфизам $\Phi : \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_2$.

Доказ. Према Ставу 1.10, постоје потпоља $F_1 \subseteq \mathbf{R}_1$ и $F_2 \subseteq \mathbf{R}_2$ изоморфна са пољем $\mathbf{Q}$ рационалних бројева. Тада су и F_1 и F_2 међусобно изоморфна поља, јер је пресликавање $\Phi_0 = \psi \circ \varphi^{-1} : F_1 \to F_2$ изоморфизам, ако су $\varphi : \mathbf{Q} \to F_1$ и $\psi : \mathbf{Q} \to F_2$ изоморфзми (а то се лако проверава).

Показаћемо како се Φ_0 може продужити до целог скупа $\mathbf{R}_1$. Нека је $x \in \mathbf{R}_1$. Тада је, према Ставу 1.31 в),

$$x = \sup_{y \le_1 x, y \in F_1} y = \sup L_x,$$

где је
$$L_x = \{y \in F_1 \,|\, y \leq_1 x\}.$$

Дефинишемо
$$\Phi(x) = \sup_{y \leq_1 x, y \in F_1} \Phi_0(y) = \sup \Phi_0(L_x).$$

Прво ваљаност дефиниције. Скуп $\Phi_0(L_x)$ је очито непразан, а ограничен је одозго бројем $\Phi_0(z)$, где је $z \in F_1$ било који број за који важи $z >_1 x$. Тако дакле, он има супремум.

Друго, за $x \in F_1$ је $\Phi(x) = \Phi_0(x)$, јер је тада скуп L_x има максимум и он је једнак x. Тако се на скупу F_1, Φ поклапа са Φ_0.

Треба још доказати особине (1). Последње две, очување неутралних елемената, следе из чињенице да је $\Phi|_{F_1} = \Phi_0$ и да је Φ_0 изоморфизам.

Очување неједнакости доказујемо овако. Нека је $x \leq_1 y$. Тада је (очигледно) $L_x \subseteq L_y$, и $\Phi_0(L_x) \subseteq \Phi_0(L_y)$, па иста неједнакост важи и за супремуме, односно $\Phi(x) \leq_2 \Phi(y)$.

Сада очување сабирања. Нека је $x + y = z$. Тада је $L_x + L_y = \{a + b \,|\, a \in L_x, b \in Ly\} = L_{x+y}$. Докажимо да је $\Phi(x) + \Phi(y)$ супремум скупа $L_x + L_y$. Најпре, то је горње ограничење, јер за $a + b \in L_x + L_y$, важи $a \leq \Phi(x)$ и $b \leq \Phi(y)$. Докажимо и да је најмање. За ма које $\varepsilon > 0$, бројеви $\Phi(x) - \varepsilon/2$ и $\Phi(y) - \varepsilon/2$ нису горња ограничења скупова L_x, односно L_y, па постоје $a \in L_x$ и $b \in L_y$ такви да је $a > \Phi(x) - \varepsilon/2$ и $b > \Phi(y) - \varepsilon/2$, што сабирањем даје $L_x + L_y \ni a + b > \Phi(x) + \Phi(y) - \varepsilon$, па број $\Phi(x) + \Phi(y) - \varepsilon$ не може бити горње ограничење скупа $L_x + L_y$. С друге стране, непосредно се проверава да је $L_x + L_y = L_z$.

Остаје још да се доксахе очување множења. То се може учинити на сличан начин, с тим што треба посебно разматрати четрири могућа случаја - када су x и y оба позитивна, оба негативна, и наизменично позитиван и негативан. Овај део доказа је изостављен. $\square$

1.44. Дедекиндови пресеци. Сада ћемо приступити опису конструкције скупа реалних бројева помоћу рационалних. Опште прихваћен метод је метод такозваних *Дедекиндових пресека.*

Уређен пар (A, B) подскупова скупа $\mathbf{Q}$ називамо Дедекиндовим пресеком, или само пресеком, ако је испуњено следеће:

- (i) $A \cap B = \emptyset$;
- (ii) $A \cup B = \mathbf{Q}$;
- (iii) $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$;
- (iv) За све $a \in A$ и $b \in B$ је $a \leq b$;
- (v) Скуп B нема минимум.

Термин пресек долази отуда јер смо избором скупова A и B „пресекли“ скуп $\mathbf{Q}$ на два дела, леви и десни.

Једноставна својства пресека (A, B) су

Сваки елемент скупа B је горње ограничење скупа A;

Ако је $a \in A$ и $x \leq a$ онда је $x \in A$;

Ако је $b \in B$ и $x \geq b$ онда је $x \in B$.

1.45. Поређење пресека. Кажемо да је пресек (A, B) мањи или једнак од (A_1, B_1) и бележимо $(A, B) \leq (A_1, B_1)$ ако је $A \subseteq A_1$. Наравно тиме је и $B \supseteq B_1$.

Како се дефиниција заснива на релацији инклузије непосредно се констатује да релација $\leq$ задовољава аксиоме (A10)-(A12). Докажимо и да задовољава аксиому (A13). Нека су (A, B) и (A_1, B_1) два пресека, и нека није тачно да је $(A, B) \leq (A_1, B_1)$.

Тада није $A \subseteq A_1$, односно постоји $a \in A \setminus A_1$. Но тада $a \in B_1$, што на основу својства (iv), значи да је a горње ограничење скупа A_1. Тако је $A_1 \subseteq A$.

Докажимо да важи и аксиома супремума (A16). Нека је (A_α, B_α), $\alpha \in I$ нека непразна фамилија пресека која има горње ограничење, на пример пресек (A_0, B_0). Конструишемо пресек (A, B) помоћу

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \qquad B = \mathbf{Q} \setminus A$$

и докажимо да је он супремум наше фамилије. Да је горње ограничење следи непосредно јер је унија A надскуп сваког A_α. Претпоставимо да је $(A', B') < (A, B)$. Тада постоји бар једно $a \in A$ које није у A'. Тада је то $a \in A_\alpha$ за бар једно α, па за такво α није $(A_\alpha, B_\alpha) \leq (A', B')$.

1.46. Рационални бројеви као подскуп скупа свих пресека. У читавом поглављу радимо са рационалним бројевима па ће интервал (a, b) означавати скуп свих *рационалних* бројева између a и b. Рационалном броју $q \in \mathbf{Q}$ додељујемо пресек $((-\infty, q], (q, +\infty))$. Јасно је да је поређење рационалних бројева сагласно са поређењем пресека, јер из $q_1 \leq q_2$ следи $(-\infty, q_1] \subseteq (-\infty, q_2]$. Такве пресеке означаваћемо са $\hat{q}_1$ и $\hat{q}_2$.

Тако ћемо за истакнуте константе нулу и јединицу узети пресеке $((-\infty, 0], (0, +\infty))$ односно $((-\infty, 1], (1, +\infty))$. С обзиром да не постоји опасност од забуне њих ћемо означавати једноставно са 0 и 1, уместо $\hat{0}$ и $\hat{1}$. Тиме је, наравно доказана и аксиома (A0).

1.47. Сабирање пресека. Дефинишемо збир пресека (A, B) и (A_1, B_1) као пресек $(A + A_1, \mathbf{Q} \setminus (A + A_1))$, при чему је $A + A_1 = \{a + a_1 \mid a \in A, a_1 \in A_1\}$. Да је заиста реч о пресеку види се јер из $a + a_1 \in A + A_1$ и $x \leq a + a_1$ следи $x \in A + A_1$. Заиста, ако је $\delta = a + a_1 - x$, онда $a - \delta/2 \in A$ и $a_1 - \delta/2 \in A_1$ и $x = a - \delta/2 + a_1 - \delta/2$.

Такође, очито је $\hat{q} + \hat{r} = \widehat{q + r}$, што значи да се слаже са сабирањем рационалних бројева.

Такво сабирање очигледно испуњава аксиоме (A1) и (A4) - просто напросто, јер је $A_1 + A_2 = A_2 + A_1$ и $(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$. Аксиома (A2) такође није спорна јер је $(A, B) + \hat{0} = (A + (-\infty, 0], \mathbf{Q} \setminus (A + (-\infty, 0])$ и $A + (\infty, 0] = A$.

Докажимо аксиому (A3). За дати пресек (A, B) формирајмо пресек (C, D) помоћу

$$C = \begin{cases} \mathbf{Q} \setminus (-A), & A \text{ нема максимум} \\ \mathbf{Q} \setminus (-A) \cup \{-\max A\}, & A \text{ има максимум} \end{cases},$$

па ћемо имати $A + C = (-\infty, 0]$. Пресек (C, D) означаваћемо са $-(A, B)$.

Докажимо и аксиому (A14). Заиста, из $(A, B) \leq (A_1, B_1)$ имамо $A \subseteq A_1$ и тиме $A + C \subseteq A_1 + C$, одакле је $(A, B) + (C, D) \leq (A_1, B_1) + (C, D)$.

1.48. Множење пресека. Множење пресека дефинисаћемо у зависности од тога да ли леви комад има или нема позитивних бројева. Пресек чији леви комад садржи бар један строго позитиван број је строго већи од $\hat{0}$, и њега ћемо звати строго позитиван. Производ строго позитивних пресека (A, B) и (A_1, B_1) дефинишемо као пресек (C, D), где је

$$C = (-\infty, 0] \cup ((A \cap \mathbf{Q}^+) \cdot (A_1 \cap \mathbf{Q}^+)), \qquad D = \mathbf{Q} \setminus C,$$

при чему је $\mathbf{Q}^+$ ознака за строго позитивне рационалне бројеве, а производ скупова се дефинише тачка по тачка. Очито је и тако добијени пресек строго позитиван, па имамо да важи и (A15).

Да аксиоме (A5)-(A8) важе за строго позитивне пресеке непосредно се проверава као и одговарајуће особине за сабирање. Није тешко ни проверити аксиому (A9).

Остаје још да дефинишемо множење пресека који не морају бити нужно позитивни. Ставимо $\hat{0} \cdot (A, B) = \hat{0}$. Ако је (A, B) негативан, онда ставимо

$$(A, B) \cdot (C, D) = -(-(A, B) \cdot (C, D)),$$

а ако су оба негативна, онда ставимо

$$(A, B) \cdot (C, D) = (-(A, B)) \cdot (-(C, D)).$$

Важење аксиома (A5)-(A9) и (A15) проверавамо свођењем на случај строго позитивних пресека.

Претходни доказ није изведен превише детаљно, већ само у основним цртама, јер представља допунски материјал.

1.49. Запажања. Конструкција Дедекиндових пресека је начин да се конструише скуп $\mathbf{R}$ помоћу скупа $\mathbf{Q}$. Одатле, ако постоји скуп $\mathbf{Q}$ онда постоји и $\mathbf{R}$, чиме егзистенција скупа реалних бројева није доказана у потпуности, већ сведена на егзистенцију скупа рационалних.

Могуће је конструисати скуп $\mathbf{Q}$ помоћу скупа $\mathbf{Z}$, а скуп $\mathbf{Z}$ помоћу скупа $\mathbf{N}$, док је скуп $\mathbf{N}$ могуће конструсити помоћу теорије скупова. Другачије речено, скуп $\mathbf{R}$ постоји ако постоји скуп $\mathbf{Q}$, скуп $\mathbf{Q}$ постоји ако постоји скуп $\mathbf{Z}$, а $\mathbf{Z}$ ако постоји N. Најзад $\mathbf{N}$ постоји ако постоје скупови. Јасно је да овакво свођење не може да се настави ad infinitum. Резултати математике двадесетог века показују да се све математичке теорије могу конструисати помоћу скупова. То значи да ако прихватимо да скупови постоје, онда можемо доказати и егзистенцију свих осталих математичких структура.

Тиме се уједно и доказује непротивречност. Наиме, ако је теорија рационалних бројева непротивречна, и постоји модел реалних бројева начињен помоћу рационалних, онда је и теорија реалних непротивречна. И тако све до теорије скупова. Међутим, Гедел је 1931. доказао да се непротивречност једне теорије не може доказати унутар ње саме, већ само конструкцијом модела у некој другој теорији. Тако се непротивречност базичне теорије - теорије скупова не може доказати, и ако се једном покаже да у теорији скупова постоји нека контрадикција онда читаву математику можемо да бацимо.

ВЕЖБАЊА

1. Нека је $(S, \leq)$ уређен скуп, тј. скуп у коме важе $(A10)$ - $(A12)$. Кажемо да је $s \in S$ *максималан елемент* скупа S, ако за свако $t \in S$ из $s \leq t$ следи $s = t$, а кажемо да је s *максимум* ако за све $t \in S$ вреди $t \leq s$.

а) Ако скуп S има максимум, онда је то његов једини максималан елемент. Доказати.

б) Нека је $S = \mathbf{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, \dots\}$, и $\leq$ дефинисано са $m \leq n$ ако n дели m. Показати да скуп S нема максимум, и одредити све максималне елементе скупа S.

в) Нека је $A = \{a, b, c\}$ и $S = \mathcal{P}(A) \setminus \{A\}$, где је $\mathcal{P}(A)$ скуп свих подскупова скупа A (тзв. *партитивни скуп* скупа A). Испитати ли S има максимум и одредити све максималне елементе скупа S.

2. а) Нека је F поље, и нека је $P \subseteq F$ његов подскуп са особинама:

(i) $x, y \in F \Rightarrow x + y,\ xy \in F$;

(ii) за свако $x \in F$ важи тачно једна од следеће три могућности: $x \in P$, $x = 0$, $-x \in P$.

Такав скуп зовемо *конус позитивних елемената.*

Доказати да је F уређено поље, ако релацију $\leq$ дефинишемо са $x \leq y$ ако и само ако $y - x \in P$;

б) Нека је $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$. Доказати да је F поље, као и да су скупови $P_1 = \{a + b\sqrt{2} \in F \mid a + b\sqrt{2} > 0\}$, $P_2 = \{a + b\sqrt{2} \in F \mid a - b\sqrt{2} > 0\}$ испуњавају услове (i) и (ii). Извести закључак да се F може уредити на два различита начина.

3. Нека S означава скуп свих пресликавања $a : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ (заправо низова индексираних и негативним бројевима) таквих да постоји $j_0 \in \mathbf{Z}$ са особином $a(j) = 0$, за све $j < j_0$.

а) Нека су $a, b \in \mathbf{Z}$. Доказати да је за фиксирано $k \in \mathbf{Z}$ скуп свих парова индекса (i, j) за које је $i + j = k$ и за које је производ $a(i)b(j) \neq 0$ коначан; Затим доказати да је производ

$$(a \cdot b)(k) = \sum_{i+j=k} a(i)b(j)$$

добро дефинисан;

б) Доказати да је $(S, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ уређено поље ако се сабирање дефинише са $(a + b)(j) = a(j) + b(j)$, множење као у претходној тачки, поредак са $a < b$ ако и само ако је $a(j) < b(j)$, где је j најмањи цео број за који је $a(j) \neq b(j)$, нула као $0(j) \equiv 0$ и јединица као $1(j) = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$;

в) Посматрајући низове

$$a(j) = \begin{cases} 1, & j > 0 \\ 0, & j \leq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad b(j) = \begin{cases} 1, & j \geq 0 \\ 0, & j < 0 \end{cases}$$

показати да у уређеном пољу S не важи Архимедово својство.

4. Нека је $F = \{P(x)/Q(x) \mid P, Q \text{ - полиноми}\}$, скуп свих *рационалних функција*, тј. количника два полинома.

а) Доказати да је F поље у односу на уобичајено сабирање и множење функција;

б) Ако је P скуп оних рационалних функција $R(x) = P(x)/Q(x)$, где су најстарији коефицијенти полинома P и Q истог знака (односно $a_n/b_m > 0$, где је $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$), доказати да је P конус, те да јем F уређено поље у односу на поредак уведен помоћу P;

в) Доказати да је F неархимедово поље, посматрајући функције $f(x) = x$, и $g(x) = 1$.

г) Читајући Архимедово својство као контрапозицију, показати да у F постоји непразан одозго ограничен скуп који нема супремум;

д) Ефективно конструисати такав скуп. [Упутство: За свако $a, b > 0$ је $ax < bx^2$.]

5. Одредити $\sup A$ и $\inf A$, ако је:

а) $A = \left\{ \dfrac{m^2}{n^2} \mid m, n \in N, m < n \right\}$;

б) $A = \left\{ \dfrac{x}{x + y} \mid x, y > 0 \right\}$;

в) $A = \left\{ \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \mid x, y > 0 \right\}$.

6. Нека су $X, Y \subseteq \mathbf{R}$ ограничени скупови. Показати да је $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$ и $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$. Показати да аналогне једнакости важе и за производ, али само под додатном претпоставком да се скупови X и Y састоје искључиво од позитивних елемената.

7. Ако децималним записима $n, d_1d_2d_3\dots$ и $m, c_1c_2c_3\dots$ одговарају исти реални бројеви, тада важи једна од следећи три могућности:
1° $m = n$ и $d_j = c_j$ за све j;
2° $m = n$ и $d_j = c_j$ за $j = 1, 2, \dots, k-1$ и $d_k + 1 = c_k$ и $d_j = 0$, $c_j = 9$ за $j > k$.
3° $n = m + 1$ и $d_j = 0$, $c_j = 9$ за све $j \in \mathbf{N}$.
Доказати.

8. Нека је p природан број. Дефинишемо k-ту p-цималу реалног броја x, као

$$d_1 = [px] - p[x];$$

$$d_n = [p^n x] - p^n[x] - \sum_{k=1}^{n-1} d_k p^{n-k}.$$

Доказати да је за свако k, $0 \le d_k \le p-1$, као и да је

$$x = \sup_{n\ge 1}\left([x] + \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{p^k}\right).$$

9. Конструисати бијекцију између скупова $(0,1)$ и $(0,1) \cup \{1, 2, \dots, n\}$.
[Упутство: Уочити неки пребројив подскуп $A \subseteq (0,1)$ и конструисати бијекцију између A и $A \cup \{1, 2, \dots, n\}$]

10. Нека су $a_j \ge 0$ реални бројеви. Дефинишемо $G = \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$ геометријску, $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ аритметичку, $H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dots + \dfrac{1}{a_n}}$ хармонијску и $K = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ квадратна средину. Доказати

$$H \le G \le A \le K,$$

при чему на сваком месту једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

11. Доказати *Малерову неједнакост*:

$$\prod_{j=1}^{n}(x_j + y_j)^{1/n} \ge \prod_{j=1}^{n} x_j^{1/n} + \prod_{j=1}^{n} y_j^{1/n},$$

где су $x_j, y_j > 0$ реални бројеви.

12. Нека су $p, q \ge 1$ реални бројеви за које важи

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

а) Доаказати Јангову неједнакост $ab \le a^{1/p} + b^{1/q}$, $a, b > 0$;
б) Доказати Хелдерову неједнакост

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}.$$

13. Доказати *Ацелову неједнакост.* Ако је $a_1^2 > a_2^2 + \dots + a_n^2$ или $b_1^2 > b_2^2 + \dots + b_n^2$, тада је

$$(a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2 \ge (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2).$$

14. Нека је f конвексна функција, и $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ низови за које важи

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \geq \sum_{j=1}^{k} b_j, \quad \text{за } k = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Доказати *Караматину неједнакост*

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n).$$